2.5 Changements de variables

On va expliquer comment faire des changements de variables lorsqu'on intègre un fonction à plusieurs variables. En dimension supérieures, par exemple en dimension n, [2] un changement de variable est une application $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ qui est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, la “dérivée” de φ est en fait une différentielle, c'est-à-dire une application matricielle que l'on appelle la **matrice jacobienne** de φ. Ses coefficients sont les dérivées partielles de φ.

Définition 2.11. *Si l'on écrit*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

alors la matrice jacobienne *de φ est la matrice*

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.12. *Par exemple, si l'on considère la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

alors $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La matrice jacobienne de φ est alors donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.13. *Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to V$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\colon V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_V f(v_1, \ldots, v_n)\, dv_1 \cdots dv_n = \int_U f\big(\varphi(u_1, \ldots, u_n)\big) \cdot \left|\det\big(\mathrm{Jac}(\varphi)\big)\right| du_1 \cdots du_n.$$

En pratique, on dit qu'on fait le changement de variable $(v_1, \ldots, v_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$.

2.5.1 Exemples de changements de variables classiques

Coordonnées polaires Un changement très courant en dimension 2 est le changement en coordonnées polaires donné par l'application φ définie par

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Les paramètres r et θ correspondent au module et à l'argument du nombre complexe $x+iy = re^{i\theta}$. Leurs domaines sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

2. En pratique, on traitera toujours des dimensions 2 ou 3.

Exemple 2.14. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)\, dx\, dy.$$

et en déduire la valeur de l'intégrale de la distribution gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$.

Solution. On procède à un changement de variables $(x,y) = \varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)\cdot r\, d\theta dr\\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r\cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr.\end{aligned}$$

On observe que la dérivée de la fonction $\exp(-r^2/2)$ par rapport à la variable r est $-r\exp(-r^2/2)$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} r\cdot\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr = \left[-\exp(-r^2/2)\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On conclut ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy = 2\pi.$$

En utilisant les propriétés de l'exponentielle, on observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dx\, dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy\right)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx\right)^2.\end{aligned}$$

Et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}.$$

Coordonnées cylindriques Le changement de coordonnées cylindriques est courant en dimension 3. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x,y,z) = \varphi(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

Autrement dit, on fait un changement de coordonnées polaires sur les deux premières variables et on garde la troisième telle quelle. Les domaines des paramètres r et θ sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$, alors que $z \in \mathbb{R}$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

On va voir dans l'exemple suivant qu'on peut également se servir des changement de coordonnées pour calculer des intégrales sur des domaines spéciaux.

Exemple 2.15. *Calculer* $\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$*, où* C *est un cône de hauteur 1 et de base le disque unité dans le plan horizontal.*

Solution. La première étape est de trouver une bonne paramétrisation du cone C. On se rappelle que

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq (1-z)^2 \text{ et } z \in [0,1]\}.$$

Autrement dit, la section horizontal du cone à hauteur z est un disque de rayon $1-z$. Le changement de coordonnées cylindriques $(x,y,z) = \varphi(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ est un peu spécial. La condition $x^2+y^2 \leq (1-z)^2$ devient $r^2 \leq (1-z)^2$, ou plus simplement $r \leq 1-z$. On obtient ainsi

$$\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} z \cdot r\,d\theta\,dr\,dz = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} zr\,dr\,dz.$$

On observe que

$$\int_0^{1-z} zr\,dr = z\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-z} = \frac{z(1-z)^2}{2},$$

ainsi que

$$\int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2}\,dz = \int_0^1 \frac{z-2z^2+z^3}{2}\,dz = \left[\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

On conclut donc

$$\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = 2\pi \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi}{12}.$$

Coordonnées sphériques Le dernier changement de coordonnées que l'on veut considérer est le changement de coordonnées sphériques. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x,y,z) = \varphi(r,\theta,\sigma) = (r\sin(\theta)\cos(\sigma), r\sin(\theta)\sin(\sigma), r\cos(\theta)).$$

Les domaines des paramètres r, θ et σ sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta \in [0,\pi]$ et $\sigma \in [0,2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\sigma) & r\cos(\theta)\cos(\sigma) & -r\sin(\theta)\sin(\sigma) \\ \sin(\theta)\sin(\sigma) & r\cos(\theta)\sin(\sigma) & r\sin(\theta)\cos(\sigma) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r^2\sin(\theta) \geq 0$.

Exemple 2.16. *Calculer* $\iiint_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$*, où* B *est la boule centrée en l'origine dans* $\mathbb{R}^3$ *et de rayon* R*.*

Solution. On effectue un changement de coordonnées sphériques. On observe que $x^2+y^2 = r^2\sin(\theta)^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \iiint_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)^2 \cdot r^2\sin(\theta)\,d\sigma\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^4\sin(\theta)^3\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta\right) \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale de $\sin(\theta)^3$. On utilise pour cela l'astuce suivante $\sin(\theta)^3 = \sin(\theta)(1-\cos(\theta)^2) = \sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)^2$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(\theta)^3 \, d\theta &= \int_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta - \int_0^\pi \sin(\theta)\cos(\theta)^2 \, d\theta \\
&= [-\cos(\theta)]_0^\pi - \left[\frac{-\cos(\theta)^3}{3}\right]_0^\pi \\
&= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\iiint_B x^2 + y^2 \, dx\, dy\, dz = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Chapitre 3

Intégrale curviligne

L'intégrale curviligne en mathématiques a pour but d'intégrer des fonctions réelles ou des champs de vecteurs le long d'une courbe dans le plan ou dans l'espace. Par exemple, en physique, le travail effectué par une particule qui subit un champs de force F en se déplaçant le long d'un chemin Γ est donné par

$$W = \int_\Gamma F(s)ds.$$

3.1 Rappels sur les courbes

Nous allons commencé par quelques rappels sur les courbes et leurs paramétrisations. Une *courbe* est un sous-ensemble 1-dimensionnel du plan ou de l'espace. Une courbe Γ peut être paramétrée par une fonction, appelée *chemin*,

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

dont l'image est précisément Γ. Dans le cas ou $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que Γ est un *lacet.* [1]

Exemple 3.1. *Soient p et q des points de $\mathbb{R}^n$, et Γ la courbe donnée par le segment de ligne droite entre p et q. Une paramétrisation de Γ est donnée par*

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto tq + (1-t)p. \end{aligned}$$

De même, le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est une courbe qui peut être paramétrée dans le sens anti-horaire par

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

et dans le sens horaire par

$$\begin{aligned} \gamma_2\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(-t), \sin(-t)). \end{aligned}$$

1. Pour être précis, il faudrait ajouter que Γ a un sens de parcours, aussi appelé une *orientation.* Lorsque l'on paramétrise Γ à l'aide d'un chemin γ, il faut faire attention à ce que γ parcourt Γ dans “le bon sens”.

On a besoin de deux définitions plus techniques.

Définition 3.2. *Un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est* $\mathcal{C}^1$ par morceaux *si* γ *est continue et s'il existe des nombres* $x_1 < \cdots < x_d$ *de* $[a,b]$ *tels que*

1. γ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur chaque morceau de* $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_d\}$*, et*
2. γ' *admet des limites finies à gauche et à droite en chaque* x_i.

Définition 3.3. *Étant donnés un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, on dit que* $t \in [a,b]$ *un* point régulier *de* γ *si* γ' *est continue en* t *et si* $\gamma'(t) \neq 0$*. Lorsque* t *est un point régulier de* γ*, on dit que* $\gamma(t)$ *est une* valeur régulière *de* γ*. Dans le cas contraire, on dit qu'il s'agit d'une valeur ou d'un point singulier.*

On dit que γ *est un* chemin régulier *si chaque* $t \in [a,b]$ *est régulier.*

Exemple 3.4. *Le chemin*

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t,t) \end{aligned}$$

est régulier, alors que le chemin

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3,t^3) \end{aligned}$$

n'est pas régulier en $t = 0$ *(il l'est partout ailleurs). On note que ces deux chemins paramétrisent la même courbe.*

3.2 Intégration le long d'un chemin

On rentre dans le vif du sujet. Supposons que l'on souhaite intégrer une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le long d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^n$. On commence par choisir une paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de notre courbe Γ.

Pour trouver la bonne formule d'intégration, on "rectifie" la courbe Γ. Pour ce faire, on partitionne l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur $\Delta t = (b-a)/n$. On remplace la portion de la courbe Γ entre $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ par le segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ dont la longueur est Δs_i. Lorsque Δs_i est très petit, alors l'intégrale de f le long du segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ vaut approximativement $f(\gamma(t_i))\Delta s_i$. Autrement dit, on s'attend à ce que la valeur de l'intégrale de f le long de Γ soit donnée par

$$I = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\Delta s_i.$$

Le théorème des accroissements finis nous dit que

$$\Delta s_i = ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|| \approx ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

On obtient ainsi

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i)) \cdot ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

Cette approche heuristique motive la définition suivante.

Définition 3.5. *Soit* Γ *une courbe paramétrée par un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $t \mapsto f(\gamma(t))$ *soit continue. On définit alors l'intégrale de* f *le long de la courbe* Γ *par*

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Exemple 3.6. *Calculer l'intégrale de la fonction* $f(x,y) = 4x^3$ *le long du segment de ligne droite* Γ *qui va du point* $(-2,-1)$ *au point* $(1,2)$.

Solution. On commence par trouver une paramétrisation de Γ. On va prendre $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+3t\\3t-1\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

et donc $||\gamma'(t)|| = 3\sqrt{2}$. On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f &= \int_0^1 4(3t-2)^3 \cdot 3\sqrt{2}\, dt \\ &= 12\sqrt{2}\left[\frac{(3t-2)^4}{12}\right]_0^1 \\ &= -15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

3.2.1 Propriétés de l'intégrale curviligne

Proposition 3.7. *L'intégrale de* f *le long de* Γ *ne dépend de la paramétrsiation choisie de* Γ. *Autrement dit, si* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $\varphi(\alpha) = a$ *et* $\varphi(\beta) = b$,[2] *alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \cdot \|(\gamma\circ\varphi)'(s)\| \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

C'est logique, quand on y pense, que l'intégrale ne dépende pas de paramétristaion. Par exemple, quand on se rappelle de ce que l'on calcule en pratique : la hauteur moyenne le long d'un chemin de randonnée ne dépend pas de la vitesse à laquelle on parcourt le chemin, ni du sens dans lequel on le parcourt.

Proposition 3.8. *Soit* Γ *une courbe qui admette une paramétrisation qui soit* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *un scalaire. Soient de plus* f *et* g *des fonctions telles que* $\int_\Gamma f$ *et* $\int_\Gamma g$ *sont bien définies. On a alors*

1. $\displaystyle\int_\Gamma \lambda f + g = \lambda \int_\Gamma f + \int_\Gamma g$
2. $\displaystyle f \geq g \Rightarrow \int_\Gamma f \geq \int_\Gamma g$
3. $\displaystyle\left|\int_\Gamma f\right| \leq \int_\Gamma |f|$

2. Cette hypothèse nous assure que les deux paramétrisation parcourent Γ dans le même sens.

3.2.2 Applications de l'intégrale curviligne

L'application principale de l'intégrale curviligne est le calcule de longueur de courbes.

Proposition 3.9. *La longueur d'une courbe* Γ *est*

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma 1.$$

Autrement dit, si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est une paramétrisation* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux de* Γ*, alors*

$$L(\Gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

3.3 Circulation d'un champ de vecteurs

On l'a mentionné en introduction, le travail d'une particule qui subit un champ de forces s'exprime comme une intégrale curviligne. C'est le moment de formaliser cette idée.

Définition 3.10. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^n$*, rappelons qu'un champ de vecteurs sur* A *est une application continue* $X\colon A \to \mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.11. *Un exemple classique de champs de vecteurs et le* gradient *d'une fonction* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *que l'on définit comme*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

3.3.1 Définition

Définition 3.12. *Soient* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *un chemin* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* X *un champ de vecteurs défini (au moins sur) sur* $\gamma([a,b])$*. On définit la* circulation *du champ de vecteur* X *le long de* γ *par*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_a^b \big\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\, dt,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *désigne le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$*.*

Il découle de la définition, que la circulation d'un champ de vecteurs vérifie les mêmes propriétés qu'une intégrale classique. Cependant, la circulation d'un champ X est différente de l'intégrale curviligne du champ de vecteur X.

Exemple 3.13. *Soit* $X(x,y) = (0,1)$ *le champ de vecteurs constant et soit* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *le chemin* $\gamma(t) = (t,0)$*. Alors*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle dt = 0.$$

En revanche, l'intégrale curviligne de X *le long de* γ *donne*

$$\int_\gamma X(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On note au passage que la circulation d'un champ de vecteurs est un nombre tandis que son intégrale curviligne est un vecteur.