

## Chapitre 2

# Intégrales doubles et triples

### 2.1 Intégrales doubles

Pour définir l'intégration de fonctions à plusieurs variables, on va commencer par les ensembles de définitions de fonctions les plus simples puis les complexifier et voir comment adapter nos définitions. On va commencer par intégrer des fonctions sur des **rectangles**.

**Définition 2.1.** Soit  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle dans le plan. Soit  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue définie sur le rectangle  $R$ . L'intégrale de  $f$  sur  $R$  est donnée par

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Interprétation géométrique** L'intégrale de la fonction  $f(x, y)$  correspond au volume situé entre le rectangle  $R$  et le graphe de la fonction  $f(x, y)$  auquel on pense comme une “nappe” au-dessus du rectangle  $R$  (voir aussi la Proposition 2.6). Comme pour l'intégrale unidimensionnelle, les portions du volume situés au-dessous du rectangle  $R$  sont comptés négativement. Par exemple, l'illustration ci-dessous<sup>1</sup> représente le volume compris entre le rectangle  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  et le graphe de la fonction  $f(x, y) = 10 - \frac{x^2 - y^2}{8}$ .



---

1. Lien vers l'image [https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral](https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral), consulté le 28.01.2025.

En d'autres termes, intégrer la fonction  $f(x, y)$  sur le rectangle  $R$  se fait en deux étapes :

1. Tout d'abord, on intègre la fonction  $f(x, y)$  selon  $x$  en traitant  $y$  comme une constante. On le fait avec les méthodes de l'intégrale unidimensionnelle. La solution de cette étape est une fonction  $g(y)$  qui ne dépend plus que de  $y$ .
2. Alors, on ré-intègre  $g(y)$  cette fois-ci comme une fonction de la variable  $y$  en utilisant une nouvelle fois les techniques d'intégration unidimensionnelle.

**Exemple 2.2.** Soit  $R = [0, 1] \times [0, 2]$ . Calculer

$$\iint_R xy e^{x^2 y} dx dy.$$

*Solution.* Par définition,

$$\iint_R xy e^{x^2 y} dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^1 xy e^{x^2 y} dx \right) dy.$$

On commence par calculer

$$\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx$$

en traitant  $y$  comme une constante. On remarque qu'en dérivant la fonction  $e^{x^2 y}$  par rapport à  $x$ , on obtient  $2xy e^{x^2 y}$ . Cela signifie que la fonction  $e^{x^2 y}/2$  est une primitive de  $xy e^{x^2 y}$  (lorsque l'on dérive par rapport à  $x$  et qu'on traite  $y$  comme une constante). Donc

$$\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx = \left[ \frac{e^{x^2 y}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^y - 1).$$

Il nous reste donc à calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{2} (e^y - 1) dy.$$

Cette intégrale se sépare en deux parties

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{2} (e^y - 1) dy &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^y dy - \frac{1}{2} \int_0^2 dy \\ &= \frac{1}{2} [e^y]_0^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= \frac{e^2 - 3}{2}. \end{aligned}$$

On conclut ainsi

$$\iint_R xy e^{x^2 y} dx dy = \frac{e^2 - 3}{2}.$$

On peut se demander s'il est vraiment important d'intégrer d'abord par rapport à  $x$ , puis ensuite par rapport à  $y$ . La réponse est non en général grâce au théorème suivant.

**Théorème 2.3.** Soit  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Astuce** En pratique, quand on veut intégrer une fonction  $f$  sur un rectangle, on va bien choisir la variable par rapport à laquelle on intègre en premier.

**Exemple 2.4.** Soit  $R = [0, 1] \times [0, 2]$ . Calculer l'intégrale

$$\iint_R x e^{xy} dx dy.$$

*Solution.* La variable  $y$  n'apparaît qu'une seule fois dans la fonction à intégrer ; on va donc essayer d'intégrer d'abord par rapport à  $y$ . Autrement dit, on calcule

$$\iint_R x e^{xy} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^2 x e^{xy} dy \right) dx.$$

La dérivée de la fonction  $e^{xy}$  par rapport à  $y$  donne  $x e^{xy}$ . Cela signifie que la fonction  $e^{xy}$  est une primitive de  $x e^{xy}$  et ainsi

$$\int_0^2 x e^{xy} dy = [e^{xy}]_0^2 = e^{2x} - 1.$$

Il reste à calculer

$$\int_0^1 e^{2x} - 1 dx = \int_0^1 e^{2x} dx - 1.$$

Une primitive de la fonction  $e^{2x}$  est la fonction  $e^{2x}/2$ . On obtient donc

$$\int_0^1 e^{2x} dx = [e^{2x}/2]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Au final, on conclut

$$\iint_R x e^{xy} dx dy = \frac{e^2 - 1}{2} - 1 = \frac{e^2 - 3}{2}.$$

## 2.2 Intégrales triples

Les intégrales triples se calculent comme les intégrales doubles, sauf que cette fois le domaine d'intégration n'est plus un rectangle dans le plan, mais un **pavé** dans l'espace à trois dimensions.

**Définition 2.5.** Soit  $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  un pavé dans l'espace (et non pas dans la mer). Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue définie sur le pavé  $P$ . L'intégrale de  $f$  sur  $P$  est donnée par

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f \left( \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

Autrement dit, l'intégrale de  $f$  se calcule comme intégrales unidimensionnelles successives d'abord en  $x$ , puis en  $y$  et enfin en  $z$ . Comme pour les intégrales doubles (voir le Théorème 2.3), on peut intégrer selon les trois variables dans n'importe quel ordre.

## 2.3 Interprétation de certains calculs d'intégrale multiples

### 2.3.1 Aires et volumes

On l'a vu dans l'exemple précédent, le calcul d'intégrales en plusieurs variables permet de retrouver certaines formules d'aire. Ce genre d'interprétation des intégrales est très général, comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 2.6.** — Soit  $U$  une partie quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . Alors, l'aire de  $U$  est égale à l'intégrale de la fonction constante 1 sur le domaine  $U$  :

$$\text{aire}(U) = \iint_U dx dy.$$

— Soit  $U$  une partie quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Alors, de manière analogue, le volume de  $U$  est :

$$\text{vol}(U) = \iiint_U dx dy dz.$$

— Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine du plan et  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soit  $U$  la partie de  $\mathbb{R}^3$  située entre le domaine  $D$  du plan horizontal et la surface décrite par le graphe de la fonction  $f$ . Alors, le volume de  $U$  est :

$$\text{vol}(U) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

### 2.3.2 Moyennes

Une autre interprétation du dernier point de la Proposition 2.6 est la suivante. Disons que le graphe de  $f$  décrit un relief, comme celui d'une colline. La fonction  $f$  symbolise alors la hauteur de ce relief au-dessus de  $D$ . En calculant l'intégrale de  $f$  sur le domaine  $D$  on obtient alors pour résultat l'aire du domaine  $D$  multipliée par la hauteur moyenne du relief. On peut s'en servir pour déterminer la hauteur moyenne du relief par la formule

$$H_{\text{moyenne}} = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\text{aire}(D)}.$$

## 2.4 Intégrales en tranches

On sait donc à présent faire des intégrales de fonctions sur des parties très simples du plan et de l'espace (les rectangles et les pavés), mais toutes les domaines d'intégration ne sont pas aussi "gentils".

**Définition 2.7.** On définit les notions de parties en tranches verticales et horizontales.

— Une partie définie en tranches verticales est une partie de  $\mathbb{R}^2$  du type

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ et } y \in [g(x), h(x)]\}$$

où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions continues  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont  $g \leq h$ .

— Une partie définie en tranches horizontales est une partie de  $\mathbb{R}^2$  du type

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \text{ et } x \in [g(y), h(y)]\}$$

où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions continues  $g, h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont  $g \leq h$ .

**Exemple 2.8.** Le disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  est une partie en tranches verticales, car on peut écrire

$$\mathbb{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ et } y \in \left[ -\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \right] \right\}.$$

C'est aussi une partie en tranches horizontales, car on peut écrire

$$\mathbb{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1] \text{ et } x \in \left[ -\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2} \right] \right\}.$$

On va donner à présent la formule permettant d'intégrer une fonction  $f$  définie sur une partie en tranches.

**Théorème 2.9.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  une partie définie en tranches verticales et  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Si, en revanche,  $A$  était une partie définie en tranches horizontales, alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Attention** Lorsque l'on calcule une intégrale sur un domaine défini en tranches, alors on ne peut pas permuter les intégrales comme dans le Théorème 2.3, car les bornes d'intégrations **dépendent** de la variable d'intégration.

**Exemple 2.10.** Calculer l'aire du disque unité de  $\mathbb{R}^2$  à l'aide d'une intégrale en tranches.

*Solution.* L'aire du disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  peut être calculé en intégrant la fonction constante  $f(x, y) = 1$  sur le disque. Comme  $\mathbb{D}$  est un domaine en tranches verticales, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{D}} dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer la fonction  $\sqrt{1-x^2}$ . Pour ce faire, on fait le changement de variables  $x = \sin(u)$  qui est une fonction bijective  $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  avec  $dx = \cos(u)du$ . Observons que  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(u)^2} = \sqrt{\cos(u)^2} = \cos(u)$ , car  $\cos(u)$  est toujours positive sur l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Les nouvelles bornes d'intégrations sont  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . On obtient

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2 du$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction  $\cos(u)^2$ , on utilise la formule trigonométrique  $\cos(u)^2 = (\cos(2u) + 1)/2$ . Ainsi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2 du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{1}{2} du = \left[ \frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2.$$

On conclut comme s'y attendait que

$$\iint_{\mathbb{D}} dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$