

L2 STUE : Mathématiques 4

TD 5

Exercice 1 (Aire d'un graphe). Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le graphe de f est la surface S paramétrée par $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

1. Calculer les dérivées partielles de φ et en déduire que la paramétrisation φ de S est régulière.
2. Trouver un champ de vecteurs normal à S et montrer que

$$\text{aire}(S) = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy.$$

3. Calculer cette aire lorsque $f(x, y) = x^2 + y^2$ et U est le disque unité.

Exercice 2. Soit T la surface paramétrée par $\psi: [0, 2\pi) \times [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\psi(\theta, z) = \left(\frac{\cos(\theta)}{z}, \frac{\sin(\theta)}{z}, z \right).$$

1. Représenter graphiquement T .
2. Calculer l'aire de la surface de T .
3. Déterminer le volume emprisonné par T , c'est-à-dire le volume de l'ensemble

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/z\}.$$

Exercice 3. Soit S la surface paramétrée par $\varphi: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ où $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y)$.
Calculer

$$\iint_S x.$$

Exercice 4. Calculer l'intégrale

$$\iint_S x^2 y^2 z,$$

où $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercice 5. Soit $\psi: U = [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\psi(s, t) = (\cos(s), \sin(s), \sin(t)).$$

1. Montrer que l'image de ψ est le cylindre

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}.$$

2. Vérifier que ψ est injective.

On note à présent $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(s, t) = (\cos(t) \cos(s), \cos(t) \sin(s), \sin(t)).$$

3. Montrer que l'image de φ est égale à la sphère unité moins les deux pôles.
4. Montrer que φ est injective.

Finalement, calculer $\|n_\psi(s, t)\|$ et $\|n_\varphi(s, t)\|$. En déduire l'aire de sphère unité et du cylindre C .

Exercice 6. *Calculer l'aire d'un hélicoïde paramétré par*

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \theta),$$

où $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Exercice 7. *Calculer l'aire d'un tore paramétré par*

$$\varphi(u, v) = ((R + \cos(u)) \cos(v), (R + \cos(u)) \sin(v), \sin(u))$$

où $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ et $R > 1$ est un paramètre fixé.