Exercice 2 / TD 5

On a réduit le calcul de l'aire du T à :

$$\text{aire}(T) = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{z^4}}\, dz$$

On pose $u = \frac{1}{z^2} \iff z = u^{-1/2}$, $dz = -\frac{u^{-3/2}}{2} du$

avec $\begin{cases} z = 1 \iff u = 1 \\ z = +\infty \iff u = 0 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \text{aire}(T) = 2\pi \int_1^0 u^{1/2} \sqrt{1+u^2}\, \frac{-u^{-3/2}}{2}\, du$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\, du.$$

Cette intégrale est dure à calculer explicitement.

En revanche, comme $u \geq 0$, on observe que

$$\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \geq \frac{1}{u}$$

et donc $\text{aire}(T) = \pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\, du$

$$\geq \pi \int_0^1 \frac{1}{u}\, du$$

$$= \pi \left[\ln(u)\right]_0^1$$

$$= \pi\left(0 - (-\infty)\right) = +\infty\ !$$

Donc, même sans calculer l'intégrale explicitement, on peut montrer que $\text{aire}(T) = +\infty$!