

## L2 STUE : Mathématiques 4

TD 4

### Intégrales curvilignes : suite

**Exercice 1.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  le chemin défini en coordonnées polaires par  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ .

1. Écrire  $\gamma(t)$  en coordonnées cartésiennes.
2. Calculer  $\|\gamma'(t)\|$  et en déduire une formule pour la longueur du chemin  $\gamma$ .
3. Appliquer la formule précédente au cas  $\theta(t) = t$  et  $r(t) = \alpha t$  pour  $\alpha > 0$ , et pour  $t \in [0, T]$ .  
Esquisser la courbe que ces coordonnées polaires paramètrent.

**Exercice 2.** Dans une région montagneuse, on modélise la température souterraine  $T(x)$  en fonction de la profondeur  $x$  selon la loi empirique :

$$T(x) = T_0 + \alpha x,$$

où  $T_0 = 15^\circ\text{C}$  dénote la température à la surface et  $\alpha = 0.03^\circ\text{C}/\text{m}$  est le gradient géothermique moyen. Un filon minéral suit un chemin souterrain modélisé par  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (10t, 5t^2)$  avec  $t \in [0, 2]$ , où  $x$  est la profondeur en mètres et  $y$  est la position horizontale en mètres.

Calculer la température moyenne rencontrée le long de ce filon.

### Circulation des champs de vecteurs

**Exercice 3.** Soit  $X(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  un champ de vecteurs défini pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

1. Calculer la circulation de  $X$  le long du cercle centré en l'origine et de rayon  $r > 0$ . En déduire qu'il n'est pas conservatif.
2. Calculer la circulation de  $X$  le long du cercle centré en  $(2, 0)$  et de rayon 1.

**Exercice 4.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{F}$  le champ de vecteur

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + z)\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^2\vec{k}.$$

Calculer sa circulation entre le point  $O$  de coordonnées  $(0, 0, 0)$  et le point  $P$  de coordonnées  $(1, 2, -1)$  le long des chemins suivants :

1.  $\gamma(t) = (t^2, 2t, -t)$  pour  $t \in [0, 1]$ .
2. Le segment de ligne droite  $[O, P]$ .

Que remarquez-vous ? Proposer une explication.

**Exercice 5.** Calculer  $\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle$  dans les cas suivants :

1.  $\gamma$  parcourt le bord du carré  $[-1, 1]^2$  dans le sens trigonométrique et  $X(x, y) = (-y, x)$ .
2.  $\gamma$  parcourt le bord du carré  $[-1, 1]^2$  dans le sens horaire et  $X(x, y) = (x - y, x + y)$ .
3.  $\gamma$  parcourt le bord du carré  $[0, \pi/2]^2$  dans le sens trigonométrique et  $X(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$ .
4.  $\gamma$  parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon  $r > 0$  dans le sens trigonométrique et  $X(x, y) = (xy^2, -x^2y)$ .

5.  $\gamma$  parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon  $r > 0$  dans le sens trigonométrique et  $X(x, y) = (xy, xy)$ .
6.  $\gamma$  parcourt le bord du disque centré en l'origine et de rayon  $r > 0$  dans le sens trigonométrique et  $X(x, y) = (2y, x)$ .

**Exercice 6.** [À faire après l'exercice 5.] Parmi les champs de vecteurs suivant, déterminer lesquels sont conservatifs et, pour ceux qui le sont, donner une fonction dont ils sont le gradient.

1.  $X(x, y) = (-y, x)$ , défini sur  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $X(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $X(x, y) = (y^2, 2xy + 2y)$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ .
4.  $X(x, y, z) = (3x^2y + 2yz^2, x^3 + 2xz^2 - 2yz^2, 4xyz - 2y^2z)$  défini sur  $\mathbb{R}^3$ .
5.  $X(x, y, z) = (2xe^y, x^2e^y + \ln(|z|), \frac{y}{z})$  défini sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ .
6.  $X(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^\alpha} (x, y, z)$  défini sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  avec  $\alpha > 0$  réel.

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

1. Représenter graphiquement (et au mieux) le gradient de  $f$ .
2. Représenter sur le même dessin les lignes de niveau de  $f$ .
3. Reprendre les question précédentes avec la fonction  $g(x, y) = xy$ .
4. Qu'observez-vous entre les lignes de niveau et le gradient de ces fonctions ?

**Exercice 8.** Soit  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  le champ de vecteurs défini par  $X(x, y) = (ye^{-x}, e^x)$  et soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ . On définit le champ de vecteurs  $Y(x, y) = f(x) \cdot X(x, y)$ .

1. Le champ  $X$  est-il conservatif ?
2. Montrer que le champ de vecteurs  $Y$  est conservatif si et seulement si  $f'(x) = k(x)f(x)$  pour une fonction  $k(x)$  que vous devez déterminer explicitement.
3. En déduire que pour  $f(x) = \exp\left(\frac{-e^{-2x}}{2} - x\right)$  le champ de vecteurs  $Y$  est conservatif.