L2 STUE : Mathématiques 4

TD 3

Changements de variables

Exercice 1. *Soit C_1 le cercle centré en l'origine et de rayon $r_1 > 0$ et soit C_2 le cercle centré en l'origine et de rayon $r_2 > r_1$. L'anneau A est le domaine du plan compris entre ces deux cercles.*

1. *Faites un dessin de A.*
2. *Calculer l'aire de A une première fois en faisant un bon changement de variable.*
3. *Calculer l'aire de A une deuxième fois en le décomposant judicieusement et en le représentant en tranche verticales.*

Remarque : *Vous pouvez également calculer l'aire de A comme l'aire du grand disque moins l'aire du petit disque et ainsi vérifier vos réponses.*

Exercice 2. *On souhaite calculer les intégrales suivantes à l'aide des bons changements de variables. Commencer par esquisser les volumes décrits.*

1. *Soit $\mathbb{D}^-$ le demi-disque inférieur de rayon 4 et centré en l'origine. Calculer*

$$\iint_{\mathbb{D}^-} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy.$$

2. *Déterminer à l'aide d'une intégrale triple le volume du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et dont la hauteur est comprise entre -1 et 1.*

Exercice 3. *On modélise de manière très simple le relief du Cervin par la fonction*

$$z(x, y) = 4478 - x^2 - y^2,$$

où $z(x, y)$ est l'altitude en mètres et x, y sont des coordonnées en kilomètres depuis le centre du sommet. Le point de départ de l'ascension est situé à une altitude de 3262m.

Calculer le rayon de la montagne à l'altitude de 3262m, puis calculer le volume de la montagne au-dessus de ce niveau.

Exercice 4. *Une médecin analyse un scanner cérébral et identifie une tumeur de forme sphérique dont la densité cellulaire suit la distribution suivante*

$$\rho(x, y, z) = 1200 \cdot e^{-0.001\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}},$$

où x, y, z sont les coordonnées en millimètres depuis le centre de la tumeur et $\rho(x, y, z)$ se mesure en cellules tumorales par millimètre cube. La tumeur est approximativement sphérique avec un rayon de 15mm.

Calculer le nombre de cellules tumorales à l'aide d'une intégrale triple.

Intégrales curvilignes

Exercice 5. *Calculer l'intégrale curviligne de f le long des chemins γ suivants :*

1. $f\colon (x,y) \mapsto xy^2$ *et* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 2t)$.
2. $f\colon (x,y) \mapsto x^3$ *et* $\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ *avec* $r > 0$.
3. $f\colon (x,y) \mapsto x^3 + y$ *et* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (3t, t^3)$.
4. $f\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ *et* $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$.

Exercice 6. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$.

1. *Le* graphe de la fonction f *est donné par le chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. *Monter que la longueur du graphe de f est donnée par*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

2. *Calculer cette longueur dans le cas où* $a = 1$, $b = 2$ *et* $f(t) = \ln(t)$.
3. *Calculer la longueur dans le cas où* $a = 0$, $b = 1$ *et* $f(t) = \cosh(t)$.

Exercice 7. *Calculer l'intégrale curviligne de f le long des chemins γ suivants :*

1. $f(x,y) = xy + \sqrt{y}$ *le long du chemin* $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ *défini par* $\gamma(t) = (-3t, 4t)$.
2. $g(x,y) = \frac{x}{y+4}$ *le long du segment de ligne droite qui va du point* $(1,-3)$ *au point* $(1,2)$.

Exercice 8. *On paramètre une* astroïde *(consulter Wikipedia pour avoir une illustration) via le chemin* $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *défini par*

$$\gamma(t) = (a\cos(t)^3, a\sin(t)^3),$$

pour un certain paramètre $a > 0$.

Calculer la longueur de l'astroïde en fonction de a.