L2 STUE : Mathématiques 4

TD 2

Intégrales multiples

Exercice 1. *Calculer les intégrales doubles suivantes en choisissant bien l'ordre d'intégration des variables lorsque nécessaire.*

1. $$\iint_R ye^{y^2-4x}\,dx\,dy,$$
   où $R = [0,2]\times[0,\sqrt{8}]$.
2. $$\iint_R xy\cos(x^2y)\,dx\,dy,$$
   où $R = [-2,3]\times[-1,1]$.
3. $$\iiint_C xyz\,dx\,dy\,dz$$
   où C *est le cube* $[0,1]^3$.
4. $$\int_0^1\int_0^{z^2}\int_0^3 y\cos(z^5)\,dx\,dy\,dz.$$

Exercice 2. *On souhaite calculer l'aire du domaine* $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2 \text{ et } x\geq y^2\}$.

1. *Faire un dessin de* A *et montrer que* A *que peut s'écrire comme une partie en tranches verticales.*
2. *Exprimer l'aire de* A *à l'aide d'une intégrale double et la calculer.*

Exercice 3. *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $$\iint_R \frac{x}{x+2y}\,dx\,dy,$$
   où $R = [1,2]\times[0,1]$.
2. $$\iiint_P z + \frac{1}{\sqrt{3+2x+y}}\,dx\,dy\,dz$$
   où $P = [-1,1]\times[0,3]\times[\sqrt{2},2]$.
3. $$\int_{\frac{-\pi}{4}}^0\int_0^\pi\int_{-\pi}^y \cos(x)\sin(y)\tan(z)\,dx\,dy\,dz$$

Exercice 4. *On souhaite calculer*

$$I = \iint_T x^2+y^2\,dx\,dy.$$

1. *Calculer* I *lorsque* T *est le triangle de sommets* $(1,1),(2,1)$ *et* $(2,2)$.

2. *Calculer I lorsque T est le triangle de sommets $(0,0),(1,1)$ et $(3,5)$.*

Exercice 5. *On veut calculer le volume du solide se trouvant au-dessus du domaine C du plan horizontal (en forme de croissant) délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$, et se trouvant au-dessous du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.*

1. *Exprimer ce volume comme une intégrale double sur C.*
2. *Intégrer par tranches verticales.*
3. *Intégrer par tranches horizontales.*

Exercice 6. *On considère le croissant de lune L défini comme la partie du disque unité de $\mathbb{R}^2$ bornée à droite par la parabole d'équation*

$$x = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

1. *Faire un dessin du croissant de lune L et montrer qu'il s'agit d'une partie définie en tranches horizontales.*
2. *Calculer l'intégrale double suivante :*

$$\iint_L x \, dx \, dy.$$