# Les suites

Arnaud Maret

Actualisé: 1er janvier 2020
vers. 1.0.1

Depuis quelques années, les problèmes d'algèbre aux Olympiades Internationales se réorientent au-delà des classiques équations fonctionnelles et autres inégalités en trois variables. Ces nouveaux problèmes s'articulent quelques fois autour de suites de nombres. Leur solution est faite de manipulations algébriques et d'outils plus standards tels que l'induction. Souvent astucieuse et courte, la solution se décline parfois à l'aide de méthodes plus académiques, voire algorithmiques. Certains de ses problèmes ont une saveur de théorie des nombres, voire de combinatoire.

Ce script fournit une brève introduction au sujet, couvrant les définitions des concepts de base, ainsi que les principaux résultats élémentaires. Une place de choix est laissée aux exemples. Il va s'en dire que la pratique est la clé pour maitriser les problèmes de suites.

La plupart des exemples et des exercices sont empruntés du recueil de problèmes d'algèbre *101 Problems in Algebra from the training of the USA IMO Team* par T. Andrescu et Z. Feng[1].

## 1 Un premier exemple

**Exemple 1** (IMO 2014). *Soit $a_0, a_1, \ldots$ une suite de nombres entiers strictement positifs telle que $a_0 < a_1 < \ldots$. Montrer qu'il existe un unique nombre entier $n \geq 1$ tel que*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

*Solution.* Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite qui satisfait les hypothèses du problème. On nous demande de montrer l'existence et l'unicité d'un certain nombre. Nous rédigerons donc la solution au propre en mettant en évidence ces deux parties distinctes.

Tout d'abord, commençons par l'étape zéro de tout problème de suite. On va oublier pour cette étape-ci la donnée du problème et se concentrer uniquement sur l'expression algébrique fournie. C'est une phase d'observation et de tâtonnement. On va manipuler l'expression donnée de multiples manières avec pour but d'obtenir des formulations équivalentes mettant certaines propriétés, *a priori* dissimulée, en évidence.

[1]disponible en ligne sous `https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/101-problems-in-algebra.pdf`

Par exemple, ici, en regroupant les termes en $a_n$ à gauche, on obtient

$$a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \iff \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n}$$
$$\iff a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \tag{1}$$

En utilisant l'hypothèse $a_n > a_{n-1}$ dans 1, il s'en suit

$$a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \implies a_{n-1} < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \tag{2}$$

La relation 2 met en évidence un comportement inductif. Comme dans toute argumentation par induction proprement rédigée, on introduit des variables logiques indexées sur $n$. Soit

1. $L(n)$ : l'inégalité $a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n}$ est vérifiée,
2. $R(n)$ : l'inégalité $\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$ est vérifiée.

La relation 1 peut être reformulée $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$, où la notation barrée indique la négation de la proposition (c'est-à-dire, $\overline{R(n)}$ est vraie si $a_{n+1} < (a_0 + \ldots + a_n)/n$). La relation 2, quant à elle, peut être écrite $L(n) \Rightarrow L(n-1)$. En combinant ces deux relations abstraites à l'aide de la transitivité de l'implication, il s'en suit que $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$ et $R(n-1) \Rightarrow R(n)$. En résumé, les relations suivantes sont vérifiées :

(i) $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$,

(ii) $L(n) \Rightarrow L(n-1)$,

(iii) $R(n-1) \Rightarrow R(n)$,

(iv) $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$.

Si l'on considère les petits cas, alors on remarque que $L(1)$ est toujours vraie parce que $a_0 > 0$ par hypothèse. Par contre, nous ne pouvons rien déduire de la valeur logique de $R(1)$ en général.

Il existe donc deux cas de figure possibles. Soit $L(n)$ est vraie pour tout $n$ ou il existe un indice $k \geq 2$ minimal tel que $L(k)$ soit fausse. On va synthétiser ces deux cas à l'aide de tableaux. Dans le premier cas, par (i), on obtient que, si $L(n)$ est vraie pour tout $n$, alors $R(n)$ est fausse pour tout $n$ :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| $L(n)$ | ✓ | ✓ | ✓ | ... |
| $R(n)$ | × | × | × | ... |

Dans le deuxième cas, les relations préalablement établies donnent

| $n$ | | $k-2$ | $k-1$ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(n)$ | ... | ✓ | ✓ | × | × | × | ... |
| $R(n)$ | ... | × | ? | ✓ | ✓ | ✓ | ... |

Observer qu'il n'est pas possible de conclure la valeur logique de $R(k-1)$ seulement à l'aide des observations (i),. . . ,(iv) déjà effectuées.

Revenons au problème posé. On doit montré l'existence et l'unicité d'un indice $n$ tel que $L(n)$ et $R(n)$ soient simultanément vraies. Dans notre table, c'est le cas si exactement une colonne contient deux $\checkmark$. Jusqu'ici, on ne peut pas le conclure. En particulier, il manque encore des informations pour exclure le premier cas où $L(n)$ est vraie pour tout $n$. En revanche, dans les deux tableaux, il existe au plus une colonne qui contient deux $\checkmark$, ce qui permet de conclure l'unicité. Reste à prouver l'existence et pour cela il va falloir opter pour une approche différente.

Que signifie montrer l'existence dans ce problème ? On a une collection d'intervalles $(a_n, a_{n+1}]$ et une collection d'expressions $(a_0 + \ldots + a_n)/n$. Il faut montrer qu'une de ces expressions se trouve dans le bon intervalle. Il serait plus simple si l'expression que l'on cherchait à localiser ne dépendait plus de $n$. Autrement dit, s'il on avait une seule expression donnée et une collection d'intervalles, quitte à modifier les intervalles que l'on considère.

On peut arriver à cette fin en isolant $a_0$, par exemple :

$$\begin{aligned} & a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \\ \iff & (n-1) \cdot a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1 < a_0 \leq n \cdot a_{n+1} - a_n - \ldots - a_1. \end{aligned}$$

Avec $b_n := (n-1) \cdot a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1$, on obtient

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \iff b_n < a_0 \leq b_{n+1}.$$

Observer que $b_1 = 0$ et $b_{n+1} - b_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$. L'existence du $n$ recherché est donc équivalente à l'existence d'un intervalle $(b_n, b_{n+1}]$ contenant $a_0$.

Il se pourrait que la suite $b_1, b_2, \ldots$ soit bornée par en-dessus par un entier strictement inférieur à $a_0$, au quel cas l'existence désirée ne serait pas vérifiée. Or,

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_0 \\ &= (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \ldots + (a_n - a_1). \end{aligned}$$

Rappelez-vous que $a_n - a_{n-1} > 0$ ! Donc, comme $a_n - a_{n-1}$ est un nombre entier par hypothèse, on a de plus $a_n - a_{n-1} \geq 1$. C'est une estimation classique et c'est aussi le seul endroit où l'on emploie l'hypothèse que la suite $a_0, a_1, \ldots$ est une suite de nombres entiers. De même, $a_n - a_i \geq 1$ pour $i < n$. Ainsi, $b_n \geq n - 1$.

La suite $b_1, b_2, \ldots$ de nombres entiers n'est donc pas bornée par en-dessus, autrement dit, les intervalles $(b_n, b_{n+1}]$ partitionnent la droite réelle de zéro ($= b_1$) à plus l'infini. Ainsi, $a_0$ étant un nombre strictement positif, il se trouve nécessairement dans l'un de ces intervalles. Cela conclut la preuve de l'existence.

Noter encore qu'un intervalle $(b_n, b_{n+1}]$ contenant $a_0$ est nécessairement unique, car tous les intervalles sont disjoints. On peut donc également établir l'unicité de cette manière. $\square$

# 2 Un peu de théorie

**Définition 2.1.** Une *suite* est une collection ordonnée, en général infinie ou semi-infinie, de nombres. Par exemple de nombres naturels, entiers ou réels. On notera $(x_n)_{n \geq a}$ pour une suite (semi-infinie) indexée à partir de $a \in \mathbb{Z}$ et $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ pour une suite (infinie) indexée sur $\mathbb{Z}$.

Observer qu'une suite de nombres $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \dots$ vers l'ensemble approprié. De même, une suite $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ n'est rien d'autre qu'une fonction des nombres entiers $\mathbb{Z}$.

Énonçons à présent quelques propriétés des suites.

**Définition 2.2.** Une suite $(x_n)$ est :

- *(strictement) croissante* si $x_{n+1} \overset{(>)}{\geq} x_n, \forall n$.
- *(strictement) décroissante* si $x_{n+1} \overset{(<)}{\leq} x_n, \forall n$.
- *constante* s'il existe un nombre $c$ tel que $x_n = c, \forall n$. On note $x_n \equiv c$.
- *périodique* si il existe un nombre entier $k \geq 1$ tel que $x_{n+k} = x_n, \forall n$. Le plus petit tel $k$ est appelé la *période* de $(x_n)$.

**Exemple 2.** *Les suites suivantes sont périodiques.*

1. *Les suites constantes sont périodiques de période 1.*
2. *La suite* $x_n := (-1)^n$ *est périodique de période 2.*
3. *La suite* $x_n := \sin(\frac{2\pi n}{m})$ *est périodique de période* $m$.

Une propriété pratique est la suivante. La preuve est laissée en exercice.

**Lemme 2.1.** *Une suite (dé)croissante qui est périodique est nécessairement constante.*

**Définition 2.3.** Une suite $(x_n)$ est *bornée par en-dessous* s'il existe un nombre réel $A$ tel que $A \leq x_n, \forall n$ et *bornée par en-dessus* s'il existe un nombre réel $B$ tel que $x_n \leq B, \forall n$. Elle est *bornée* si elle est bornée à la fois par en-dessus et par en-dessous. Les nombres $A$ et $B$ sont appelés des *bornes* (les bornes ne sont évidemment pas uniques).

Par exemple, une suite de nombres (strictement) positifs est par définition bornée par en-dessous. Pour aller plus loin dans cette idée, on peut définir *bornée* de manière équivalente en exigeant l'existence d'un nombre réel $M$ tel que $|x_n| \leq M, \forall n$. En effet,

$$|x_n| \leq M \iff -M \leq x_n \leq M.$$

La propriété d'être bornée est reliée aux propriétés de (dé)croissance par le lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Une suite bornée par en-dessus/en-dessous et croissante/décroissante converge.*

On ne va volontairement pas rentrer dans les détails techniques de la définition de convergence dans ce script. La notion intuitive de convergence est suffisante pour les problèmes olympiques. Par exemple, les suites constantes sont convergentes. La suite $x_n := 1/n$ converge vers 0. La suite $x_n := n^2$ diverge vers plus l'infini. La suite $x_n := (-1)^n$ n'est pas convergente.

Intuitivement, une suite croissante, représentée dans un système d'axes, ne peut que "monter". Si elle est bornée par en-dessus, alors il existe un plafond qu'elle n'est pas autorisée à dépasser. Ne pouvant pas redescendre, la suite va "converger" vers une valeur en-dessous du plafond.

Deux grandes familles de suites sont présentées dans les exemples suivants.

**Exemple 3** (Suites arithmétiques)**.** *Une suite* $(x_n)$ *est arithmétique s'il existe un nombre* $r$*, appelé raison, tel que* $x_{n+1} = x_n + r$ *pour tout* $n$*. En français, chaque élément de la suite est obtenu à partir du précédent en ajoutant* $r$*. Montrer que si* $(x_n)$ *est une suite arithmétique de raison* $r$*, alors* $x_n = x_0 + nr, \forall n$*.*

*Solution.* Nous raisonnons évidemment par induction. Si $n = 0$, le résultat est clair. Supposons à présent que le résultat est vérifié pour $n$ et montrons le pour $n+1$. Par définition et en utilisant l'hypothèse d'induction,

$$x_{n+1} = x_n + r = (x_0 + nr) + r = x_0 + (n+1)r.$$

Si la suite est indexée sur $\mathbb{Z}$, alors, de même, on peut montrer que si la conclusion est vérifiée pour $n$, alors elle l'est aussi pour $n - 1$. □

Selon la valeur de la raison, une suite arithmétique satisfait les propriétés suivantes :

- si $r = 0$, alors la suite est constante.
- si $r \neq 0$, alors la suite diverge vers l'infini. Plus précisément, si $r > 0$, alors la suite diverge vers plus l'infini, et si $r < 0$, alors la suite diverge vers moins l'infini.

**Exemple 4** (Suites géométriques)**.** *Une suite* $(x_n)$ *est géométrique s'il existe un nombre* $r$*, appelé raison, tel que* $x_{n+1} = r \cdot x_n$ *pour tout* $n$*. En français, chaque élément de la suite est obtenu à partir du précédent en multipliant par* $r$*. Montrer que si* $(x_n)$ *est une suite arithmétique de raison* $r$*, alors* $x_n = r^n \cdot x_0, \forall n$*.*

La solution est inductive tout comme pour les suites arithmétiques.

Selon la valeur de la raison, une suite géométrique satisfait les propriétés suivantes :

- si $r = 0$ ou $x_0 = 0$, alors la suite est constamment nulle : $x_n \equiv 0$.
- si $r = 1$, alors la suite est constante.
- si $r > 1$ et $x_0 \neq 0$, alors la suite est divergente vers plus ou moins l'infini selon le signe de $x_0$.
- si $0 < |r| < 1$, alors la suite est convergente vers zéro.

**Exemple 5.** *Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels telle que* $x_1 = 2$ *et*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

*Trouver une expression explicite pour* $x_n$*.*

*Solution.* On commence par quelques observations sur la suite donnée en oubliant la conclusion. Tout d'abord, on observe que la suite $(x_n)$ est une suite de nombres strictement positifs. Par induction, $x_1 > 0$ et $x_{n+1} > 0$ si $x_n > 0$. De manière plus précise, on peut montrer que $x_n \geq \sqrt{2}$. A nouveau, par induction, $x_1 = 2 > \sqrt{2}$ et en utilisant AM-GM, comme $x_n > 0$, on obtient

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x_n}{2} \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire de l'éventuelle (dé)croissance de la suite ? Une petite inspection montre que la suite est décroissante. En effet, comme $x_n \geq \sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2} = x_n.$$

La suite $(x_n)$ étant décroissante et bornée par en-dessous, elle est donc convergente. Comment déterminer la valeur vers laquelle la suite converge ? Le truc (qui n'est pas une preuve au sens strict) est, qu'à la limite, on a "$x_{n+1} = x_n$". Si on dénote par $x$ la limite de la suite $(x_n)$, alors, en supposant $x_{n+1} = x_n = x$, on a

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Comme $x_n \geq \sqrt{2}$, on a $x = \sqrt{2}$.

Pour simplifier la notation, parce que l'on préfère travailler avec suites qui convergent vers zéro, on pose $y_n := x_n - \sqrt{2}$. La condition initiale devient

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{y_n + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{y_n + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

L'astuce algébrique intervient à présent. On reconnait en le terme $2(y_n + \sqrt{2})$ un presque-double produit qui pourrait s'associer au terme $y_n^2$. Il manque cependant un facteur $2\sqrt{2}$. En l'ajoutant, on obtient

$$y_{n+1} + 2\sqrt{2} = \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})} + 2\sqrt{2} = \frac{(y_n + 2\sqrt{2})^2}{2(y_n + \sqrt{2})}.$$

En contemplant les deux dernières expressions, on remarque un schéma inductif. Plus précisément,

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1} + 2\sqrt{2}} = \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})} \cdot \frac{2(y_n + \sqrt{2})}{(y_n + 2\sqrt{2})^2} = \left(\frac{y_n}{y_n + 2\sqrt{2}}\right)^2.$$

C'est gagné ! Une telle formule inductive est trop esthétique pour ne pas être la clé du problème. De manière inductive, et en utilisant $y_1 = 2 - \sqrt{2}$, on obtient

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1} + 2\sqrt{2}} = \left(\frac{y_n}{y_n + 2\sqrt{2}}\right)^2 = \ldots = \left(\frac{y_1}{y_1 + 2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}.$$

En revenant à la suite $(x_n)$, on obtient

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

qui nous permet d'isoler $x_{n+1}$ et de conclure. □

## 3 Trucs et astuces à l'emporter

Pour résoudre un problème de suites, on conseille l'approche suivante.

a.1) **Manipulations algébriques :** Comme dans les exemples précédents, il est bon de commencer par jouer avec l'expression donnée dans le problème, en oubliant le reste de l'énoncé. Manipuler l'expression à foison en essayant de faire apparaitre des motifs inductifs, télescopiques ou toute formule esthétique.

Cette étape est clé et le temps à lui consacrer ne doit pas être négligé. En général, les problèmes ont plusieurs solutions dont une courte et subtile, et une plus technique et plus longue, mais moins astucieuse.

a.2) **Propriétés standards :** On s'intéresse également, dans la phase d'approche, aux éventuelles propriétés satisfaites par la suite donnée dans le problème (par exemple périodicité, (dé)croissance,...).

Il est également utile, lorsque qu'une formule inductive est donnée, de calculer explicitement les premiers termes d'une suite. Dans certains cas, on peut même espérer obtenir une formule explicite à partir d'une formule inductive.

b) **Mettre de l'ordre :** En utilisant les observations faites aux points précédents, on peut tenter de simplifier l'expression algébrique à l'aide de substitutions pertinentes (par exemple $y_n := 1/x_n$, $\Delta_n := x_n - x_{n-1}$ ou $y_n := x_n - x$ où $x$ est la limite conjecturée de la suite $(x_n)$). Une bonne substitution vous permettra d'y voir plus clair.

c) **Se concentrer sur la conclusion :** C'est l'étape ou l'on retourne au problème initial et on essaie de mettre bouts à bouts les éléments obtenus précédemment pour démontrer l'énoncé voulu.

Allez ! Encore un dernier exemple pour la route.

**Exemple 6.** *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que*

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 3.$$

*Trouver toutes les valeurs possibles de $x_1$ et $x_2$ telles que la suite $(x_n)$ prenne une valeur entière pour une infinité d'indices $n$.*

*Première solution.* Soit $(x_n)$ une telle suite. On commence par l'étape des manipulations algébriques. En manipulant l'expression donnée de diverses manières, on obtient tôt ou tard la relation suivante :

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}}.$$

Cette relation met en évidence le rôle joué par l'inverse des $x_n$. En effet, on a

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Cette expression suggère immédiatement la substitution $y_n := 1/x_n$ qui est valable parce que les $x_n$ sont tous non-nuls. La nouvelle suite $(y_n)$ satisfait la relation clé suivante :

$$y_n + y_{n-2} = 2y_{n-1}.$$

Cette relation implique que la suite $(y_n)$ est une suite arithmétique (cf exercice). Soit $r$ la raison de la suite $(y_n)$. Rappelez-vous que la suite $(y_n)$ est divergente vers l'infini, sauf si $r = 0$ au quel cas la suite est constante.

En utilisant que la suite $(x_n)$ est entière pour une infinité d'indices $n$, on sait que $|x_n| \geq 1$ pour cette même infinité d'indices $n$ (car $x_n \neq 0$ par hypothèse). Pour ces mêmes indices $n$, on a donc $|y_n| \leq 1$. Ainsi, la suite $(y_n)$ ne diverge pas vers l'infini. Elle est donc constante par la remarque précédente.

La suite $(x_n)$ est également constante et cette constante est un nombre entier non-nul. Par conséquent, $x_1 = x_2$ est un nombre entier non-nul.

Inversement, si $x_1 = x_2$ est un nombre entier non-nul, alors $x_n = x_1$ pour tout $n$ et la suite $(x_n)$ prend donc bien des valeurs entières pour une infinité d'indices $n$. $\square$

*Deuxième solution.* Soit à nouveau $(x_n)$ une suite qui satisfait les conclusions du problème. Dans cette solution, on commence plutôt par calculer les premiers termes de la suite. On obtient

$$x_3 = \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2},$$

puis

$$x_4 = \frac{x_2 x_3}{2x_2 - x_3} = \frac{x_2 \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2}}{2x_2 - \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2}} = \frac{x_1 x_2}{3x_1 - 2x_2}.$$

On est dès lors tenté de conjecturer que

$$x_n = \frac{x_1 x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2} = \frac{x_1 x_2}{n(x_1 - x_2) + 2x_2 - x_1}.$$

Une simple induction permet de vérifier cette affirmation.

La présence du $n$ au dénominateur de l'expression explicite pour $x_n$ montre que $(x_n)$ converge vers zéro à part si $x_1 = x_2$, au quel cas le $n$ du dénominateur ne joue aucun rôle. Comme la suite $(x_n)$ est par hypothèse jamais nulle, elle ne peut prendre qu'un nombre fini de fois une valeur entière si elle converge vers zéro. On en déduit donc que la suite $(x_n)$ ne converge pas vers zéro et donc $x_1 = x_2$. La fin de la preuve est identique à la solution précédente. $\square$