Intégrales multiples, curvilignes et surfaciques.

IRMA, Université de Strasbourg

8 avril 2025

Table des matières

Chapitre 1

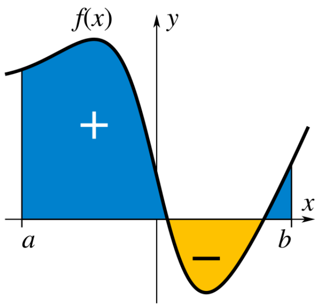
Rappel sur les intégrales unidimensionnelles

1.1 Qu'est-ce que l'intégration ?

L'intégrale unidimensionnelle, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction à une variable sur un intervalle réel, à plusieurs interprétation.

1. La première interprétation, la plus connue en général, est le calcul de "l'aire sous la courbe". C'est l'interprétation donnée par Riemann lors de la construction de son intégrale.

   Plus précisément, soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f entre a et b est dénotée
   $$\int_a^b f(x)\,dx$$
   et définie comme l'aire **signée** enfermée entre l'axe horizontal et le graphe de la fonction dont on calcule l'intégrale. L'aire est comptabilisée positivement si la région se situe au-dessus de l'axe horizontal et négativement si elle se situe au-dessous, comme illustré par la figure ci-dessous [1].

   La construction formelle de l'intégrale par Riemann repose sur une approximation de la fonction dont on souhaite calculer l'intégrale par des fonctions en escaliers. Or l'intégrale

1. Lien vers l'image https://en.wikipedia.org/wiki/Integral, consulté le 28.01.2025.

d'une fonction en escalier est exactement une somme d'aires de rectangles. Ainsi, plus la fonction en escalier est proche de la fonction initiale, plus la somme des aires des rectangles est proche de l'aire se trouvant sous le graphe de notre fonction initiale.

2. Une autre interprétation du calcul d'une intégrale est la suivante. Supposons que notre fonction nous donne la température relevée le long d'une tige métallique. Alors le rapport de l'intégrale de la fonction par la longueur de la tige nous fournis la température moyenne relevé le long de cette tige.

   Si l'on pense à la tige comme l'intervalle $[a, b]$ et qu'on mesure une température $f(t)$ au point t de la tige, alors la température **moyenne** le long de la tige est

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

1.2 Comment se calcule une intégrale ?

Il existe plusieurs manières de calculer une intégrale. On va en rappeler trois.

1.2.1 Primitive

La méthode de base pour calculer une intégrale de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de trouver une *primitive* de la fonction f, c'est-à-dire une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée de F est f :

$$F'(x) = f(x).$$

D'une fois que l'on a identifié une primitive F de f, on a alors la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Quand utiliser cette méthode ? À chaque fois qu'on est capable d'identifier de mémoire ou de construire une primitive de f.

Exemple 1.1. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx.$$

Solution. Une primitive de la fonction $\cos(2x)$ est donnée par la fonction $\sin(2x)/2$. On a donc

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

1.2.2 Changement de variables

Une autre méthode importante est connue sous le nom de changement de variables. L'idée est de remplacer la variable x par une nouvelle variable pour laquelle la fonction à intégrer s'exprime de manière plus simple. Le résultat général est le suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\varphi\colon [\alpha,\beta]\to[a,b]$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

En pratique, on dit qu'on fait le changement de variable $x=\varphi(u)$. Le terme $f(x)$ devient donc $f(\varphi(u))$ et le terme dx devient $\varphi'(u)\,du$ (car $\frac{dx}{du}=\frac{d}{du}\varphi(u)=\varphi'(u)$). Il ne faut pas oublier de changer les deux bornes d'intégration a et b et les remplacer par les bonnes valeurs de α et β !

Exemple 1.3. *Calculer l'intégrale suivante :*
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Solution. Il n'est pas nécessairement clair *a priori* quelle est la primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En revanche, le terme $\sqrt{1-x^2}$ nous indique un changement de variables trigonométrique. En effet, si l'on pose $x=\sin(u)$ avec $u\in[-\pi/2,\pi/2]$, alors $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin(u)^2}=\sqrt{\cos(u)^2}=|\cos(u)|=\cos(u)$, car $\cos(u)\geq 0$ pour $u\in[-\pi/2,\pi/2]$. Du coup, $dx=\cos(u)\,du$. Les nouvelles bornes d'intégrations sont 0 et $\pi/2$, car la fonction $\sin(u)$ est une bijection de l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ vers $[-1,1]$. On a donc
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\cos(u)}\cdot\cos(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \pi/2-(-\pi/2)=\pi.$$

Quand utiliser cette méthode ? Cette méthode peut être très utile quand on ne trouve pas de primitive pour la fonction à intégrer.

1.2.3 Intégration par partie

La dernière méthode est celle de l'intégration par partie. La formule est la suivante.

Théorème 1.4. *Soient $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ et $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

En pratique, lorsque l'on applique cette méthode, on doit choisir qui va jouer le rôle de f—la fonction à dériver—et qui va jouer le rôle de g—la fonction à intégrer. Le but étant de simplifier au maximum la fonction à intégrer, on va en général choisir f comme la fonction dont la dérivée est la plus simple possible.

Quand utiliser cette méthode ? Cette méthode s'avère particulièrement utile lorsque l'on veut calculer l'intégrale du produit de deux fonctions de nature différente.

Exemple 1.5. *Calculer l'intégrale suivante :*
$$\int_{-1}^0 xe^{-x}\,dx.$$

Solution. La fonction que l'on souhaite intégrer est le produit de deux fonctions de nature différente : une fonction linéaire (ou polynomiale) et la fonction exponentielle. Il n'est pas clair quelle est la primitive dans ce cas ou quel bon changement de variables on pourrait essayer. On va donc procéder à une intégration par partie.

On va prendre $f(x) = x$ (la fonction à dériver). Sa dérivée est très simple, car $f'(x) = 1$. Du coup, $g'(x) = e^{-x}$. Il faut donc trouver une fonction dont la dérivée est e^{-x}. On peut prendre $g(x) = -e^{-x}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx &= [-xe^{-x}]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 1 \cdot -e^{-x}\,dx \\
&= 0 - (-(-1)e) + \int_{-1}^{0} 1 \cdot e^{-x}\,dx \\
&= -e + [-e^{-x}]_{-1}^{0} \\
&= -e + (-1) - (-e) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales doubles et triples

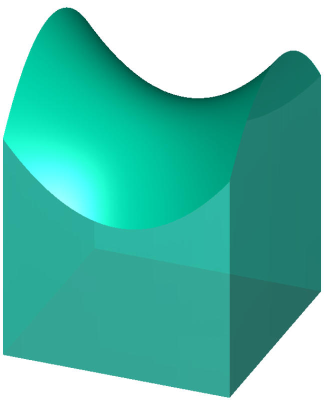
2.1 Intégrales doubles

Pour définir l'intégration de fonctions à plusieurs variables, on va commencer par les ensembles de définitions de fonctions les plus simples puis les complexifier et voir comment adapter nos définitions. On va commencer par intégrer des fonctions sur des **rectangles**.

Définition 2.1. *Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle dans le plan. Soit $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le rectangle R. L'*intégrale de f sur R *est donnée par*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Interprétation géométrique L'intégrale de la fonction $f(x, y)$ correspond au volume situé entre le rectangle R et le graphe de la fonction $f(x, y)$ auquel on pense comme une "nappe" au-dessus du rectangle R (voir aussi la Proposition 2.6). Comme pour l'intégrale unidimensionnelle, les portions du volume situés au-dessous du rectangle R sont comptés négativement. Par exemple, l'illustration ci-dessous [1] représente le volume compris entre le rectangle $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et le graphe de la fonction $f(x, y) = 10 - \frac{x^2 - y^2}{8}$.



1. Lien vers l'image https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral, consulté le 28.01.2025.

En d'autres termes, intégrer la fonction $f(x, y)$ sur le rectangle R se fait en deux étapes :

1. Tout d'abord, on intègre la fonction $f(x, y)$ selon x en traitant y comme une constante. On le fait avec les méthodes de l'intégrale unidimensionnelle. La solution de cette étape est une fonction $g(y)$ qui ne dépend plus que de y.
2. Alors, on ré-intègre $g(y)$ cette fois-ci comme une fonction de la variable y en utilisant une nouvelle fois les techniques d'intégration unidimensionnelle.

Exemple 2.2. *Soit $R = [0, 1] \times [0, 2]$. Calculer*

$$\iint_R xye^{x^2y}\,dx\,dy.$$

Solution. Par définition,

$$\iint_R xye^{x^2y}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx \right) dy.$$

On commence par calculer

$$\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx$$

en traitant y comme une constante. On remarque qu'en dérivant la fonction e^{x^2y} par rapport à x, on obtient $2xye^{x^2y}$. Cela signifie que la fonction $e^{x^2y}/2$ est une primitive de xye^{x^2y} (lorsque l'on dérive par rapport à x et qu'on traite y comme une constante). Donc

$$\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx = \left[\frac{e^{x^2y}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right).$$

Il nous reste donc à calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right)\,dy.$$

Cette intégrale se sépare en deux parties

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right)\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^y\,dy - \frac{1}{2}\int_0^2 dy \\ &= \frac{1}{2}[e^y]_0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 \\ &= \frac{e^2-3}{2}.\end{aligned}$$

On conclut ainsi

$$\iint_R xye^{x^2y}\,dx\,dy = \frac{e^2-3}{2}.$$

On peut se demander s'il est vraiment important d'intégrer d'abord par rapport à x, puis ensuite par rapport à y. La réponses est non en général grâce au théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit $f\colon R = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Astuce En pratique, quand on veut intégrer une fonction f sur un rectangle, on va bien choisir la variable par rapport à laquelle on intègre en premier.

Exemple 2.4. *Soit $R = [0, 1] \times [0, 2]$. Calculer l'intégrale*

$$\iint_R xe^{xy}\,dx\,dy.$$

Solution. La variable y n'apparait qu'une seule fois dans la fonction à intégrer ; on va donc essayer d'intégrer d'abord par rapport à y. Autrement dit, on calcule

$$\iint_R xe^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\,dy \right) dx.$$

La dérivée de la fonction e^{xy} par rapport à y donne xe^{xy}. Cela signifie que la fonction e^{xy} est une primitive de xe^{xy} et ainsi

$$\int_0^2 xe^{xy}\,dy = [e^{xy}]_0^2 = e^{2x} - 1.$$

Il reste à calculer

$$\int_0^1 e^{2x} - 1\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx - 1.$$

Une primitive de la fonction e^{2x} est la fonction $e^{2x}/2$. On obtient donc

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = [e^{2x}/2]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Au final, on conclut

$$\iint_R xe^{xy}\,dx\,dy = \frac{e^2 - 1}{2} - 1 = \frac{e^2 - 3}{2}.$$

2.2 Intégrales triples

Les intégrales triples se calculent comme les intégrales doubles, sauf que cette fois le domaine d'intégration n'est plus un rectangle dans le plan, mais un **pavé** dans l'espace à trois dimensions.

Définition 2.5. *Soit $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ un pavé dans l'espace (et non pas dans la marre). Soit $f\colon P \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le pavé P. L'*intégrale de f sur P *est donnée par*

$$\iiint_P f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x, y, z)\,dx \right) dy \right) dz.$$

Autrement dit, l'intégrale de f se calcule comme intégrales unidimensionnelles successives d'abord en x, puis en y et enfin en z. Comme pour les intégrales doubles (voir le Théorème 2.3), on peut intégrer selon les trois variables dans n'importe quel ordre.

2.3 Interprétation de certains calculs d'intégrale multiples

2.3.1 Aires et volumes

On l'a vu dans l'exemple précédent, le calcule d'intégrales en plusieurs variables permet de retrouver certaines formules d'aire. Ce genre d'interprétation des intégrales est très général, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.6. — *Soit U une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors, l'aire de U est égale à l'intégrale de la fonction constante 1 sur le domaine U :*

$$\mathrm{aire}(U) = \iint_U dx\, dy.$$

— *Soit U une partie quelconque de $\mathbb{R}^3$. Alors, de manière analogue, le volume de U est :*

$$\mathrm{vol}(U) = \iiint_U dx\, dy\, dz.$$

— *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ située entre le domaine D du plan horizontal et la surface décrite par le graphe de la fonction f. Alors, le volume de U est :*

$$\mathrm{vol}(U) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

2.3.2 Moyennes

Une autre interprétation du dernier point de la Proposition 2.6 est la suivante. Disons que le graphe de f décrit un relief, comme celui d'une colline. La fonction f symbolise alors la hauteur de ce relief au-dessus de D. En calculant l'intégrale de f sur le domaine D on obtient alors pour résultat l'aire du domaine D multipliée par la hauteur moyenne du relief. On peut s'en servir pour déterminer la hauteur moyenne du relief par la formule

$$H_{\text{moyenne}} = \frac{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}{\mathrm{aire}(D)}.$$

2.4 Intégrales en tranches

On sait donc à présent faire des intégrales de fonctions sur des parties très simples du plan et de l'espace (les rectangles et les pavés), mais toutes les domaines d'intégration ne sont pas aussi "gentils".

Définition 2.7. *On définit les notions de parties en tranches verticales et horizontales.*

— *Une* partie définie en tranches verticales *est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ et } y \in [g(x), h(x)]\big\}$$

où g et h sont deux fonctions continues $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ qui satisfont $g \leq h$.

— *Une* partie définie en tranches horizontales *est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] \text{ et } x \in [g(y), h(y)]\big\}$$

où g et h sont deux fonctions continues $g, h\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ qui satisfont $g \leq h$.

Exemple 2.8. *Le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est une partie en tranches verticales, car on peut écrire*

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ et } y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right]\right\}.$$

C'est aussi une partie horizontales, car on peut aussi écrire

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1] \text{ et } x \in \left[-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}\right]\right\}.$$

On va donner à présent la formule permettant d'intégrer un fonction f définie sur une partie en tranches.

Théorème 2.9. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie définie en tranches verticales et $f : A \to \mathbb{R}$ continue, alors*

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Si, en revanche, A était une partie définie en tranches horizontales, alors

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

Attention Lorsque l'on calcule une intégrale sur un domaine défini en tranches, alors on ne peut pas permuter les intégrales comme dans le Théorème 2.3, car les bornes d'intégrations **dépendent** de la variable d'intégration.

Exemple 2.10. *Calculer l'aire du disque unité de $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'une intégrale en tranches.*

Solution. L'aire du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^2$ peut être calculé en intégrant la fonction constante $f(x, y) = 1$ sur le disque. Comme $\mathbb{D}$ est un domaine en tranches verticales, on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} dx\, dy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right) dx \\ &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer la fonction $\sqrt{1 - x^2}$. Pour ce faire, on fait le changement de variable $x = \sin(u)$ qui est une fonction bijective $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ avec $dx = \cos(u)du$. Observons que $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin(u)^2} = \sqrt{\cos(u)^2} = \cos(u)$, car $\cos(u)$ est toujours positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Les nouvelles bornes d'intégrations sont $-\pi/2$ et $\pi/2$. On obtient

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\, du$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction $\cos(u)^2$, on utilise la formule trigonométrique $\cos(u)^2 = (\cos(2u) + 1)/2$. Ainsi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\, du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{1}{2}\, du = \left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2.$$

On conclut comme s'y attendait que

$$\iint_{\mathbb{D}} dx\, dy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi.$$

2.5 Changements de variables

On va expliquer comment faire des changements de variables lorsqu'on intègre un fonction à plusieurs variables. En dimension supérieures, par exemple en dimension n,[2] un changement de variable est une application $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ qui est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, la "dérivée" de φ est en fait une différentielle, c'est-à-dire une application matricielle que l'on appelle la **matrice jacobienne** de φ. Ses coefficients sont les dérivées partielles de φ.

Définition 2.11. *Si l'on écrit*

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

alors la matrice jacobienne *de φ est la matrice*

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.12. *Par exemple, si l'on considère la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

alors $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La matrice jacobienne de φ est alors donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.13. *Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to V$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\colon V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_V f(v_1, \dots, v_n)\, dv_1 \cdots dv_n = \int_U (f \circ \varphi)(u_1, \dots, u_n) \cdot |\det(\mathrm{Jac}(\varphi))|\, du_1 \cdots du_n.$$

En pratique, on dit qu'on fait le changement de variable $(v_1, \dots, v_n) = \varphi(u_1, \dots, u_n)$.

2.5.1 Exemples de changements de variables classiques

Coordonnées polaires Un changement très courant en dimension 2 est le changement en coordonnées polaires donné par l'application φ définie par

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Les paramètres r et θ correspondent au module et à l'argument du nombre complexe $x+iy = re^{i\theta}$. Leurs domaines sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

2. En pratique, on traitera toujours des dimensions 2 ou 3.

Exemple 2.14. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\,dy.$$

Solution. On procède à un changement de variables $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\,dy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)\cdot r\,d\theta dr \\ &= 2\pi\int_0^{+\infty} r\cdot\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr.\end{aligned}$$

On observe que la dérivée de la fonction $\exp(-r^2/2)$ par rapport à la variable r est $-r\exp(-r^2/2)$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} r\cdot\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr = \left[-\exp(-r^2/2)\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On conclut ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\,dy = 2\pi.$$

Coordonnées cylindriques Le changement de coordonnées cylindriques est courant en dimension 3. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

Autrement dit, on fait un changement de coordonnées polaires sur les deux premières variables et on garde la troisième telle quelle. Les domaines des paramètres r et θ sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$, alors que $z \in \mathbb{R}$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

On va voir dans l'exemple suivant qu'on peut également se servir des changement de coordonnées pour calculer des intégrales sur des domaines spéciaux.

Exemple 2.15. *Calculer* $\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$*, où* C *est un cône de hauteur 1 et de base le disque unité dans le plan horizontal.*

Solution. La première étape est de trouver une bonne paramétrisation du cone C. On se rappelle que

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1-z)^2 \text{ et } z \in [0, 1]\}.$$

Autrement dit, la section horizontal du cone à hauteur z est un disque de rayon $1 - z$. Le changement de coordonnées cylindriques $(x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ est un peu spécial. La condition $x^2 + y^2 \leq (1-z)^2$ devient $r^2 \leq (1-z)^2$, ou plus simplement $r \leq 1 - z$. On obtient ainsi

$$\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{2\pi} z\cdot r\,d\theta\,dr\,dz = 2\pi\int_0^1\int_0^{1-z} zr\,dr\,dz.$$

On observe que

$$\int_0^{1-z} zr\,dr = z\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-z} = \frac{z(1-z)^2}{2},$$

ainsi que

$$\int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2}\,dz = \int_0^1 \frac{z-2z^2+z^3}{2}\,dz = \left[\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

On conclut donc

$$\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = 2\pi\cdot\frac{1}{24} = \frac{\pi}{12}.$$

Coordonnées sphériques Le dernier changement de coordonnées que l'on veut considérer est le changement de coordonnées sphériques. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x,y,z) = \varphi(r,\theta,\sigma) = (r\sin(\theta)\cos(\sigma), r\sin(\theta)\sin(\sigma), r\cos(\theta)).$$

Les domaines des paramètres r, θ et σ sont $r\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta\in[0,\pi]$ et $\sigma\in[0,2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\sigma) & r\cos(\theta)\cos(\sigma) & -r\sin(\theta)\sin(\sigma) \\ \sin(\theta)\sin(\sigma) & r\cos(\theta)\sin(\sigma) & r\sin(\theta)\cos(\sigma) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r^2\sin(\theta)\geq 0$.

Exemple 2.16. *Calculer $\iiint_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$, où B est la boule centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^3$ et de rayon R.*

Solution. On effectue un changement de coordonnées sphériques. On observe que $x^2+y^2 = r^2\sin(\theta)^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\iiint_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)^2\cdot r^2\sin(\theta)\,d\sigma\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi\int_0^R\int_0^\pi r^4\sin(\theta)^3\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi\left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta\right) \\ &= \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale de $\sin(\theta)^3$. On utilise pour cela l'astuce suivante $\sin(\theta)^3 = \sin(\theta)(1-\cos(\theta)^2) = \sin(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta)^2$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta &= \int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta - \int_0^\pi \sin(\theta)\cos(\theta)^2\,d\theta \\ &= [-\cos(\theta)]_0^\pi - \left[\frac{-\cos(\theta)^3}{3}\right]_0^\pi \\ &= 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\iiint_B x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Chapitre 3

Intégrale curviligne

L'intégrale curviligne en mathématiques a pour but d'intégrer des fonctions réelles ou des champs de vecteurs le long d'une courbe dans le plan ou dans l'espace. Par exemple, en physique, le travail effectué par une particule qui subit un champs de force F en se déplaçant le long d'un chemin Γ est donné par

$$W = \int_\Gamma F(s)ds.$$

3.1 Rappels sur les courbes

Nous allons commencé par quelques rappels sur les courbes et leurs paramétrisations. Une *courbe* est un sous-ensemble 1-dimensionnel du plan ou de l'espace. Une courbe Γ peut être paramétrée par une fonction, appelée *chemin*,

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

dont l'image est précisément Γ. Dans le cas ou $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que Γ est un *lacet.* [1]

Exemple 3.1. *Soient p et q des points de $\mathbb{R}^n$, et Γ la courbe donnée par le segment entre p et q. Une paramétrisation de Γ est donnée par*

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^n\\ t &\mapsto tq + (1-t)p.\end{aligned}$$

De même, le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est une courbe qui peut être paramétrée dans le sens anti-horaire par

$$\begin{aligned}\gamma_1\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t))\end{aligned}$$

et dans le sens horaire par

$$\begin{aligned}\gamma_2\colon [0,4\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto (\cos(-t), \sin(-t)).\end{aligned}$$

1. Pour être précis, il faudrait ajouter que Γ a un sens de parcours, aussi appelé une *orientation*. Lorsque l'on paramétrise Γ à l'aide d'un chemin γ, il faut faire attention à ce que γ parcourt Γ dans "le bon sens".

On a besoin de deux définitions plus techniques.

Définition 3.2. *Un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est* $\mathcal{C}^1$ par morceaux *si* γ *est continue et s'il existe des nombres* $x_1 < \cdots < x_d$ *de* $[a,b]$ *tels que*

1. γ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur chaque morceau de* $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_d\}$*, et*
2. γ' *admet des limites finies à gauche et à droite en chaque* x_i*.*

Définition 3.3. *Étant donnés un chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, on dit que* $t \in [a,b]$ *un* point régulier *de* γ *si* γ' *est continue en* t *et si* $\gamma'(t) \neq 0$*. Lorsque* t *est un point régulier de* γ*, on dit que* $\gamma(t)$ *est une* valeur régulière *de* γ*. Dans le cas contraire, on dit qu'il s'agit d'une valeur ou d'un point singulier.*

On dit que γ *est un* chemin régulier *si chaque* $t \in [a,b]$ *est régulier.*

Exemple 3.4. *Le chemin*

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t,t) \end{aligned}$$

est régulier, alors que le chemin

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3,t^3) \end{aligned}$$

n'est pas régulier en $t = 0$ *(il l'est partout ailleurs). On note que ces deux chemins paramétrisent la même courbe.*

3.2 Intégration le long d'un chemin

On rentre dans le vif du sujet. Supposons que l'on souhaite intégrer une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le long d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^n$. On commence par choisir une paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de notre courbe Γ.

Pour trouver la bonne formule d'intégration, on "rectifie" la courbe Γ. Pour ce faire, on partitionne l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur $\Delta t = (b-a)/n$. On remplace la portion de la courbe Γ entre $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ par le segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ dont la longueur est Δs_i. Lorsque Δs_i est très petit, alors l'intégrale de f le long du segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ vaut approximativement $f(\gamma(t_i))\Delta s_i$. Autrement dit, on s'attend à ce que la valeur de l'intégrale de f le long de Γ soit donnée par

$$I = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\Delta s_i.$$

Le théorème des accroissements finis nous dit que

$$\Delta s_i = ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|| \approx ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

On obtient ainsi

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i)) \cdot ||\gamma'(t_i)|| \cdot \Delta t.$$

Cette approche heuristique motive la définition suivante.

Définition 3.5. *Soit Γ une courbe paramétrée par un chemin $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $t \mapsto f(\gamma(t))$ soit continue. On définit alors l'intégrale de f le long de la courbe Γ par*

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Exemple 3.6. *Calculer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = 4x^3$ le long du segment Γ qui va du point $(-2,-1)$ au point $(1,2)$.*

Solution. On commence par trouver une paramétrisation de Γ. On va prendre $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+3t\\3t-1\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

et donc $||\gamma'(t)|| = 3\sqrt{2}$. On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f &= \int_0^1 4(3t-2)^3 \cdot 3\sqrt{2}\, dt \\ &= 12\sqrt{2}\left[\frac{(3t-2)^4}{12}\right]_0^1 \\ &= -15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

3.2.1 Propriétés de l'intégrale curviligne

Proposition 3.7. *L'intégrale de f le long de Γ ne dépend de la paramétrsiation choisie de Γ. Autrement dit, si $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$,*[2] *alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \cdot \|(\gamma\circ\varphi)'(s)\| \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

C'est logique, quand on y pense, que l'intégrale ne dépende pas de paramétristaion. Par exemple, quand on se rappelle de ce que l'on calcule en pratique : la hauteur moyenne le long d'un chemin de randonnée ne dépend pas de la vitesse à laquelle on parcourt le chemin, ni du sens dans lequel on le parcourt.

Proposition 3.8. *Soit Γ une courbe qui admette une paramétrisation qui soit $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Soient de plus f et g des fonctions telles que $\int_\Gamma f$ et $\int_\Gamma g$ sont bien définies. On a alors*

1. $\displaystyle\int_\Gamma \lambda f + g = \lambda \int_\Gamma f + \int_\Gamma g$
2. $\displaystyle f \geq g \Rightarrow \int_\Gamma f \geq \int_\Gamma g$
3. $\displaystyle\left|\int_\Gamma f\right| \leq \int_\Gamma |f|$

2. Cette hypothèse nous assure que les deux paramétrisation parcourent Γ dans le même sens.

3.2.2 Applications de l'intégrale curviligne

L'application principale de l'intégrale curviligne est le calcule de longueur de courbes.

Proposition 3.9. *La longueur d'une courbe Γ est*

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma 1.$$

Autrement dit, si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation $\mathcal{C}^1$ par morceaux de Γ, alors

$$L(\Gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

3.3 Circulation d'un champ de vecteurs

On l'a mentionné en introduction, le travail d'une particule qui subit un champ de forces s'exprime comme une intégrale curviligne. C'est le moment de formaliser cette idée.

Définition 3.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, rappelons qu'un champ de vecteurs sur A est une application continue $X\colon A \to \mathbb{R}^n$.*

Exemple 3.11. *Un exemple classique de champs de vecteurs et le* gradient *d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on définit comme*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

3.3.1 Définition

Définition 3.12. *Soient $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux et X un champ de vecteurs défini (au moins sur) sur $\gamma([a,b])$. On définit la* circulation *du champ de vecteur X le long de γ par*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_a^b \big\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\, dt,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Il découle de la définition, que la circulation d'un champ de vecteurs vérifie les mêmes propriétés qu'une intégrale classique. Cependant, la circulation d'un champ X est différente de l'intégrale curviligne du champ de vecteur X.

Exemple 3.13. *Soit $X(x,y) = (0,1)$ le champ de vecteurs constant et soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ le chemin $\gamma(t) = (t,0)$. Alors*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle dt = 0.$$

En revanche, l'intégrale curviligne de X le long de γ donne

$$\int_\gamma X(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On note au passage que la circulation d'un champ de vecteurs est un nombre tandis que son intégrale curviligne est un vecteur.

3.3.2 Interprétation

L'interprétation physique de la circulation d'un champ de vecteurs est celle du *travail d'une force.* On suppose qu'une particule se déplace le long d'un chemin γ est soumis à un champ de forces $\overrightarrow{F}$ (par exemple gravitationnel ou magnétique). Le travail effectué par la particule sera donné par

$$\int_\gamma \langle \overrightarrow{F}, d\gamma\rangle.$$

3.3.3 Propriétés de la circulation

Comme pour l'intégrale curviligne, la circulation n'est pas complètement indépendante du choix de la paramétrisation ; il faut prendre en compte l'orientation des courbes. Si $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que φ *préserve l'orientation* si $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ et qu'elle *renverse l'orientation* si $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$.

Proposition 3.14. *Soient $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux et X un champ de vecteurs défini sur $\gamma([a,b])$. Soit encore $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$.*

1. *Si φ préserve l'orientation, alors* $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} \langle X, d(\gamma\circ\varphi)\rangle = \int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle.$
2. *Si φ renverse l'orientation, alors* $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} \langle X, d(\gamma\circ\varphi)\rangle = -\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle.$

3.3.4 Un champ particulier : le gradient

L'intégrale d'un champ de vecteurs donné par le gradient d'une fonction f est simple à déterminer comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.15. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a*

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma\rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un lacet, alors

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma\rangle = 0.$$

En d'autres termes, la circulation d'un gradient ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée de la courbe γ le long de laquelle on intègre.

Cependant, cette indépendance du chemin n'est pas une loi universelle pour les champs de vecteurs.

Exemple 3.16. *Prenons le champ de vecteurs $X(x,y) = (-y,x)$ et le chemin $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Si X était un gradient, on aurait $\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = 0$, mais on a en réalité*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0.$$

Lorsqu'un champ de vecteurs a la propriété que ses intégrales le long de tous les lacets sont zéro, alors on dit que le champ est conservatif.

3.3.5 Champ de vecteurs conservatifs

Définition 3.17. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. On dit que X est* conservatif *si pour tout lacet γ à valeurs dans U qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = 0$.*

En particulier, tout gradient est un champ conservatif. En fait, on peut même montrer que les champs conservatifs sont des gradients.

Proposition 3.18. *Soit A un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $X\colon A \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Il y a équivalence entre*

1. *Le champ X est conseratif.*
2. *Il existe une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X = \nabla f$.*

Chapitre 4

Intégrales surfaciques

4.1 Rappels sur le produit vectoriel

On rappelle la formule du produit vectoriel, qui nous sera nécessaire pour calculer un vecteur orthogonal à une surface.

Définition 4.1. *Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est un vecteur*

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel a les propriétés fondamentales suivantes.

Proposition 4.2. *On a :*

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $(\alpha \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.
3. $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{w} + \vec{v}_2 \times \vec{w}$,
4. (Produit Mixte) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

La conséquence principale de ces propriétés est

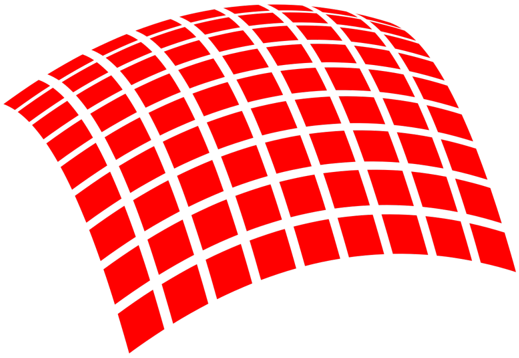
Corollaire 4.3. *On a $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$ et $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$.*

4.2 Intégrales surfaciques

Les intégrales surfaciques sont l'analogue des intégrales doubles pour les intégrales curvilignes.

$$\text{intégrales simples} \rightsquigarrow \text{intégrales doubles}$$
$$\text{intégrales curvilignes} \rightsquigarrow \text{intégrales surfaciques}$$

Rappelons nous qu'une surface S est un objet de dimension 2, comme une sphère ou une nappe par exemple, qui vit, la plupart du temps, dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$. Pour pouvoir intégrer une fonction f sur S, on a besoin d'une paramétrisation $\varphi(x, y)$ de S, où (x, y) varient dans une région U de $\mathbb{R}^2$.



Exemple 4.4. *La sphère unité* $\mathbb{S}^2$ *de* $\mathbb{R}^3$ *donnée par l'équation* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *peut être paramétrée à l'aide des coordonnées sphériques par*

$$\varphi(\theta, \sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3,$$

où $\theta \in [0, \pi]$ *est la coordonnée de* latitude *et* $\sigma \in [0, 2\pi)$ *est la coordonnée de* longitude*.*

Exemple 4.5. *Le paraboloïde d'équation* $z = x^2 + y^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *est une surface paramétrée par*

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3,$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *(ici le domaine de* φ *est tout* $\mathbb{R}^2$*).*

Pour être très précis, lorsque l'on calcule des intégrales surfaciques, il faut faire attention à choisir des paramétrisations que ne sont pas trop "singulières".

Définition 4.6. *On va dire que* φ *paramètre* S *de façon* régulière *si*

1. φ *de classe* $\mathcal{C}^1$*,*
2. *les vecteurs tangents*
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$$
sont non-nuls et non-colinéaires pour tous (x, y)*.*

Un objet important pour l'intégration surfacique est la notion de vecteur normal.

Définition 4.7. *Soit* S *une surface paramétrée de façon régulière par* $\varphi(x, y)$*. Le* vecteur normal *à* S *au point* $\varphi(x, y)$ *est*

$$n_\varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y).$$

Par construction, le vecteur $n_\varphi(x, y)$ *est perpendiculaire aux deux vecteurs tangents* $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$*, d'où le nom de vecteur normal.*

Exemple 4.8. *Si l'on considère à nouveau la paraboloïde* $z = x^2 + y^2$ *paramétrée par* $\varphi(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$*, alors les vecteurs tangents sont donnés par*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

On remarque que φ *est une paramétrisation régulière dont le vecteur normal est*

$$n_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en arrive finalement à la définition de l'intégrale surfacique.

Définition 4.9. *Soit S une surface paramétrée de façon régulière par $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ et soit $f\colon S \to \mathbb{R}$ une fonction continue à intégrer. L'*intégrale surfacique de f sur S *est*

$$\iint_S f = \iint_U f(\varphi(x,y)) \cdot ||n_\varphi(x,y)||\, dx\, dy.$$

Exemple 4.10. *Intégrer la fonction constante $f(x,y,z) = 1$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Solution. On utilise la paramétrisation de $\mathbb{S}^2$ avec les coordonnées sphériques donnée par

$$\varphi(\theta,\sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)).$$

Les vecteurs tangents sont donnés par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\sigma) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\sigma) \\ \sin(\theta)\cos(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur normal est donc donné par

$$n_\varphi(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\sigma) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\sigma) \\ \sin(\theta)\cos(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2\cos(\sigma) \\ -\sin(\theta)^2\sin(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Sa norme est donc

$$||n_\varphi(\theta,\sigma)|| = \sqrt{\sin(\theta)^4\cos(\sigma)^2 + \sin(\theta)^4\sin(\sigma)^2 + \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2} = \sin(\theta).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}^2} 1 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\, d\sigma\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

4.2.1 Applications de l'intégrale surfacique

La première interprétation est celle de l'aire de la surface

Proposition 4.11. *L'aire d'une surface S paramétrée de façon régulière par $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ est*

$$\text{aire}(S) = \iint_U ||n_\varphi(x,y)||\, dx\, dy.$$

4.2.2 Propriétés de l'intégrale surfacique

Proposition 4.12. *Soient U et V deux domaines de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ et $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières d'une surface S. Alors, pour toute fonction continue f, on a*

$$\iint_U f(\varphi(x,y)) \cdot \|n_\varphi(x,y)\|\, dx\, dy = \iint_V f(\psi(x,y)) \cdot \|n_\psi(x,y)\|\, dx\, dy.$$

Cela signifie que l'intégrale de f sur la surface S ne dépend pas de la paramétrisation de S.

Chapitre 5

Le théorème de Green

Dans ce chapitre, on va énoncer et étudier le célèbre théorème de Green. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Stokes que l'on verra plus tard. Il possède de nombreuses applications en mathématiques et en physique, car il permet notamment de réduire l'étude d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ à son bord.

5.1 Énoncé

Théorème 5.1 (Théorème de Green)**.** *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que son bord puisse être paramétré par un lacet $\gamma(t)$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et parcouru dans le sens trigonométrique. Soit $X\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini sur D et dont les composantes sont données par $X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, avec $P\colon D \to \mathbb{R}$ et $Q\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Exemple 5.2. *Vérifier le théorème de Green dans le cas où D est le disque de rayon 1 centré en l'origine et $X(x,y) = (x, xy)$.*

Solution. Comme $X(x,y) = (x, xy)$, on a $P(x,y) = x$ et $Q(x,y) = xy$. On calcule donc

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y.$$

On peut à présent déterminer le membre de droite. En utilisant des coordonnées polaires, on peut écrire

$$\begin{aligned}\iint_D y\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sin(\theta)\cdot r\, dr\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\, d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) \\ &= 0\cdot\frac{1}{3} = 0.\end{aligned}$$

Or, comme l'on peut paramétrer le bord de D dans le sens trigonométrique à l'aide du chemin $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \cos(t)^2 \sin(t)\, dt \\
&= \left[\frac{-\sin(t)^2}{2} - \frac{\cos(t)^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\
&= 0 - \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 5.3. *Calcule la circulation du champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$ le long du bord du carré $[-1, 1]^2$ parcouru dans le sens trigonométrique.*

Solution. On va utiliser le théorème de Green, ce qui va nous éviter de devoir paramétrer le bord du carré. On va noter $D = [-1, 1]^2$ et son bord γ. On écrit aussi $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = x$ les composantes du champ de vecteurs X. On calcule rapidement que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Le théorème de Green nous dit alors que la circulation de X le long de γ est donnée par

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle = \iint_D 2\, dx\, dy = 2 \cdot \mathrm{aire}(D) = 8.$$

5.2 Applications

5.2.1 Calculs d'aires

Proposition 5.4. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle le théorème de Green s'applique. On note γ une paramétrisation $\mathcal{C}^1$ par morceaux de son bord, parcouru dans le sens trigonométrique. On a alors*

$$\mathrm{aire}(D) = \int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle,$$

où $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ est n'importe quel champ de vecteurs défini sur D qui satisfait

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Par exemple, on peut prendre $X(x, y) = (-y, 0)$, $X(x, y) = (0, x)$ ou encore $X(x, y) = (-y/2, x/2)$, ce qui donne

$$\mathrm{aire}(D) = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle = \frac{1}{2} \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle.$$

Exemple 5.5. *Calcul de l'aire de l'astroïde dont le bord est paramétré par le lacet*

$$\gamma(t) = (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

Solution. On va dénoter l'astroïde par A. On applique la méthode précédente avec le champ de vecteurs $X(x, y) = (-y/2, x/2)$. On obtient alors

$$\operatorname{aire}(A) = \frac{1}{2} \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle$$

Pour calculer cette intégrale, on a besoin du vecteur dérivé $\gamma'(t) = (-3\cos(t)^2 \sin(t), 3\sin(t)^2 \cos(t))$. On a alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{aire}(A) &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t)^3 \\ \cos(t)^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos(t)^2 \sin(t) \\ \sin(t)^2 \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \, dt \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin(2t)^2 \, dt \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} \, dt \\
&= \frac{3}{16} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5.2.2 Champs conservatifs

Le théorème de Green nous sert également à trouver un critère pour déterminer si un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est conservatif, au sens de la Définition 3.17.

Proposition 5.6 (La dimension 2)**.** *Soit* $X \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un champ de vecteurs défini sur* ***l'entièreté*** *de* $\mathbb{R}^2$ *et dont les composantes sont données par*

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Il y a équivalence entre

1. *Le champ* X *est conservatif.*
2. *Pour tous* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on a*
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Ce critère peut être généralisé en dimension supérieure. Sa preuve n'est alors plus une conséquence du théorème de Green, mais du plus général théorème de Stokes.

Proposition 5.7 (La dimension 3)**.** *De même, si* $X \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *est un champ de vecteurs défini sur* ***l'entièreté*** *de* $\mathbb{R}^3$ *et dont les composantes sont données par*

$$X(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Il y a équivalence entre

1. *Le champ X est conservatif.*
2. *Pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z).$$

Exemple 5.8. *En reprenant le champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$ de l'Exemple 3.16. Ce champ est bien défini sur l'entièreté de $\mathbb{R}^2$. Si l'on applique le critère précédent avec $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = x$, alors on obtient*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On en conclut donc que le champ X n'est pas conservatif.

Attention Pour pouvoir appliquer ces critères, il faut absolument vérifier que le champ de vecteurs X est bien défini sur tout $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.9. *Le champ de vecteurs*

$$X(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

est défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (et donc pas sur tout $\mathbb{R}^2$). On a vu en TD qu'il n'était pas conservatif, car sa circulation le long du cercle unité n'est pas nulle. En revanche, si l'on pose $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, alors on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

5.2.3 Inégalité Isopérimétrique

Théorème 5.10. *Soit γ un lacet* simple *de classe $\mathcal{C}^1$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$. On note D le domaine enserré par γ, on a alors*

$$\text{aire}(D) \leq \frac{L(\gamma)^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si γ paramétrise un cercle.

Chapitre 6

Le théorème de Stokes

C'est l'heure du *finale grande* : le théorème de Stokes. Ce théorème généralise plusieurs formules d'intégration que l'on a vues jusqu'à présent. De manière très informelle, le théorème de Stokes dit que l'intégrale de la "dérivée" $d\omega$ d'une fonction ou d'un champ de vecteurs ω sur un domaine Ω est égale à l'intégrale de ω le long du bord $\partial\Omega$ de Ω :

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

L'objectif de ce chapitre est de présenter deux version du théorème de Stokes pour la dimension 3.

6.1 Quelques cas particuliers

Aussi abstrait que cette formule puisse paraitre, on l'a déjà rencontrée.

Théorème fondamental de l'analyse Par exemple, étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise souvent que

$$\int_b^a f'(x)\,dx = f(a) - f(b).$$

C'est un cas particulier 1-dimensionnel du théorème de Stokes où Ω est l'intervalle $[a, b]$ et son bord est simplement donné par les deux nombres $\{a\}$ et $\{b\}$.

Circulation d'un gradient On a également vu que si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ était une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma\rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

C'est aussi un cas particulier du théorème se Stokes où le gradient ∇f joue le rôle de la "dérivée" de f et Ω est la courbe $\gamma([a, b])$ dont le bord est fait des deux points $\{\gamma(a)\}$ et $\{\gamma(b)\}$.

Théorème de Green Enfin, on a vu avec le théorème de Green que si $X\colon D \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est paramétré par un lacet γ, alors

$$\iint_D \operatorname{rot}(X) = \int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle.$$

Ici, $\operatorname{rot}(X)$ est le rotationnel de X et jour le rôle de la "dérivée" de X.

6.2 Opérateurs différentiels

Pour énoncé le théorème se Stokes en dimension 3, on a besoin d'un certain vocabulaire et d'outils d'analyse. On en a déjà utilisé certains, parfois sans s'en rendre compte.

6.2.1 Gradient

Étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a défini son gradient comme le champ de vecteurs $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donné par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

En pratique, on dit parfois que l'on applique *l'opérateur* $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\big)$ à la fonction f. Comme une fonction peut transformer un nombre en un autre nombre, un opérateur peut transformer une fonction en un champ de vecteurs.

6.2.2 Divergence

La divergence est un autre opérateur. Étant donné un champ de vecteurs $X\colon A \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un domaine A de $\mathbb{R}^n$ et dont on écrit les composantes $X = (X_1, \dots, X_n)$, on définit la *divergence* de X comme la fonction

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

La divergence est un opérateur qui transforme donc un champ de vecteurs en une fonction réelle. Les physiciens le note parfois

$$\operatorname{div}(X) = \langle \nabla, X\rangle,$$

car on peut le voir comme le "produit scalaire" de $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\big)$ avec $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 6.1. *Calculer la divergence de $X(x, y) = (x + y, x - y)$.*

Solution. Dans ce cas, $X_1(x, y) = x + y$ et $X_2(x, y) = x - y$. On obtient donc

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1 + (-1) = 0.$$

Exemple 6.2. *Montrer la divergence du gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la somme des dérivées partielles secondes de f, c'est-à-dire*

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Solution. C'est une conséquence immédiate des définitions du gradient et de la divergence.

Interprétation Comme son nom l'indique, la divergence exprime à quel point le champ de vecteur X diverge, c'est-à-dire qu'il quantifie la séparation de deux points qui au départ était proches l'un de l'autre.

6.2.3 Rotationnel

Le rotationnel est un opérateur que l'on a déjà rencontré dans le contexte du théorème de Green pour des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. On va maintenant introduire la notion analogue en dimension 3.

Soit $X\colon A \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ défini sur un domaine A de $\mathbb{R}^3$ et dont les composantes sont $X = (X_1, X_2, X_3)$. On définit le *rotationnel* de X comme le champ de vecteurs

$$\operatorname{rot}(X) = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right).$$

Le rotationnel est donc un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. On le trouve parfois noté

$$\operatorname{rot}(X) = \nabla \times X,$$

car on peut le calculer comme le "produit vectoriel" de $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\big)$ avec $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 6.3. *Se rappeler qu'un champ de vecteurs X défini sur tout $\mathbb{R}^3$ est conservatif si et seulement si* $\operatorname{rot}(X) = 0$.

Exemple 6.4. *Calcul du rotationnel de $X(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$.*

Solution. On écrit $X_1(x, y, z) = y^2 + z^2$, $X_2(x, y, z) = x^2 + z^2$ et $X_3(x, y, z) = x^2 + y^2$. On peut alors calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} &= 2y - 2z\\ \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} &= 2z - 2x\\ \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} &= 2x - 2y.\end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{rot}(X) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y).$$

Proposition 6.5. *Soit A un domaine de $\mathbb{R}^3$ et soient $X\colon A \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a*

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

Interprétation Le rotationnel quantifie a quel point un champ de vecteur "tourne" autour d'un point. Par exemple, lors d'un cyclone, le rotationnel du vent (vu comme un champ de vecteurs) autour de l'oeil du cyclone est non nul.

6.3 Les théorèmes de Stokes et de la divergence

6.3.1 Le théorème de Stokes en dimension 3

Théorème 6.6. *Soit S une surface de classe $\mathcal{C}^2$ dont le bord est un lacet simple Γ. Soit $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs (défini au moins dans un voisinage de S) dont les composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Alors

$$\iint_S \left\langle \operatorname{rot}(X), d\vec{S} \right\rangle = \int_\Gamma \left\langle X, d\vec{\Gamma} \right\rangle,$$

où $d\vec{S}$ est un vecteur normal à la surface S et $d\vec{\Gamma}$ est tangent au lacet Γ.

Remarque : *On suppose que Γ est parcouru dans le sens* positif, *c'est-à-dire que le sens de $d\vec{S}$ et $d\vec{\Gamma}$ sont reliés par la règle de la main droite.*

En pratique, on commence par trouver une paramétrisation $\varphi(x, y)$ de la surface S comme on le faisait pour les intégrales surfacique. Supposons que le domaine de définition de φ est un domaine U de $\mathbb{R}^2$. On choisit ensuite une paramétrisation du lacet Γ qui est le bord de la surface S par un chemin $\gamma(t)$. Le théorème de Stokes peut alors être ré-écrit

$$\iint_U \langle \operatorname{rot}(X), n_\varphi \rangle \, dx\, dy = \int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle,$$

où n_φ est le vecteur normal à la surface S induit par la paramétrisation φ (cf. Définition 4.7).

Exemple 6.7. *Vérifier le théorème de Stokes lorsque $X(x, y, z) = (-z, x, 0)$ et S est l'hémisphère nord de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ orienté vers le haut.*

Solution. On va paramétrer S en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\varphi(\theta, \sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)).$$

Comme S n'est pas la sphère entière, mais seulement l'hémisphère nord, le domaine U de S est

$$U = \{(\theta, \sigma) : \theta \in [0, \pi/2], \quad \sigma \in [0, 2\pi)\}.$$

On avait déjà calculé le vecteur normal n_φ dans l'Exemple 4.10 où l'on avait obtenu

$$n_\varphi(\theta, \sigma) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2\cos(\sigma) \\ -\sin(\theta)^2\sin(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Comme $\cos(\theta)\sin(\theta) \geq 0$ lorsque $\theta \in [0, \pi/2]$, le vecteur normal n_φ pointe vers le haut, comme désiré.

Le rotationnel du champ de vecteurs X est donné par :

$$\operatorname{rot}(X) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -z \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut à présent calculer le membre de gauche dans le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
\iint_U \langle \mathrm{rot}(X), n_\varphi \rangle \, d\theta \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cos(\sigma) \\ -\sin(\theta)^2 \sin(\sigma) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \sin(\sigma) + \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \, d\sigma \\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \, d\sigma \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= 0 + 2\pi \left[\frac{-\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Pour calculer le deuxième membre, on a besoin d'une paramétrisation du bord de S qui correspond au cercle unité dans le plan horizontal. Autrement dit, on peut utiliser la paramétrisation $\gamma(t) = \varphi(\pi/2, t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ pour $t \in [0, 2\pi)$. Cette paramétrisation est dans le sens trigonométrique qui est bien la direction positive lorsque n_φ pointe vers le haut. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 \, dt \\
&= \left[\frac{2t + \sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

6.3.2 Le théorème de la divergence

On conclut avec une nouvelle variante du théorème de Stokes connu sous le nom du théorème de la divergence.

Théorème 6.8. *Soit U un domaine de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est une surface S. Soit $X \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs (défini au moins au voisinage de U) dont les composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors*

$$\iiint_U \mathrm{div}(X) = \iint_S \left\langle X, d\vec{S} \right\rangle,$$

où $\vec{S}$ est un vecteur normal à S.