Chapitre 6

Le théorème de Stokes

C'est l'heure du *finale grande* : le théorème de Stokes. Ce théorème généralise plusieurs formules d'intégration que l'on a vues jusqu'à présent. De manière très informelle, le théorème de Stokes dit que l'intégrale de la "dérivée" $d\omega$ d'une fonction ou d'un champ de vecteurs ω sur un domaine Ω est égale à l'intégrale de ω le long du bord $\partial\Omega$ de Ω :

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

L'objectif de ce chapitre est de présenter deux version du théorème de Stokes pour la dimension 3.

6.1 Quelques cas particuliers

Aussi abstrait que cette formule puisse paraitre, on l'a déjà rencontrée.

Théorème fondamental de l'analyse Par exemple, étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise souvent que

$$\int_b^a f'(x)\,dx = f(a) - f(b).$$

C'est un cas particulier 1-dimensionnel du théorème de Stokes où Ω est l'intervalle $[a,b]$ et son bord est simplement donné par les deux nombres $\{a\}$ et $\{b\}$.

Circulation d'un gradient On a également vu que si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ était une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

C'est aussi un cas particulier du théorème se Stokes où le gradient ∇f joue le rôle de la "dérivée" de f et Ω est la courbe $\gamma([a,b])$ dont le bord est fait des deux points $\{\gamma(a)\}$ et $\{\gamma(b)\}$.

Théorème de Green Enfin, on a vu avec le théorème de Green que si $X\colon D \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est paramétré par un lacet γ, alors

$$\iint_D \operatorname{rot}(X) = \int_\gamma \langle X, d\gamma\rangle.$$

Ici, $\operatorname{rot}(X)$ est le rotationnel de X et jour le rôle de la "dérivée" de X.

6.2 Opérateurs différentiels

Pour énoncé le théorème se Stokes en dimension 3, on a besoin d'un certain vocabulaire et d'outils d'analyse. On en a déjà utilisé certains, parfois sans s'en rendre compte.

6.2.1 Gradient

Étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a défini son gradient comme le champ de vecteurs $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donné par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

En pratique, on dit parfois que l'on applique *l'opérateur* $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\big)$ à la fonction f. Comme une fonction peut transformer un nombre en un autre nombre, un opérateur peut transformer une fonction en un champ de vecteurs.

6.2.2 Divergence

La divergence est un autre opérateur. Étant donné un champ de vecteurs $X\colon A \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un domaine A de $\mathbb{R}^n$ et dont on écrit les composantes $X = (X_1, \ldots, X_n)$, on définit la *divergence* de X comme la fonction

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

La divergence est un opérateur qui transforme donc un champ de vecteurs en une fonction réelle. Les physiciens le note parfois

$$\operatorname{div}(X) = \langle \nabla, X\rangle,$$

car on peut le voir comme le "produit scalaire" de $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\big)$ avec $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Exemple 6.1. *Calculer la divergence de $X(x,y) = (x+y, x-y)$.*

Solution. Dans ce cas, $X_1(x,y) = x+y$ et $X_2(x,y) = x-y$. On obtient donc

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1 + (-1) = 0.$$

Exemple 6.2. *Montrer la divergence du gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la somme des dérivées partielles secondes de f, c'est-à-dire*

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Solution. C'est une conséquence immédiate des définitions du gradient et de la divergence.

Interprétation Comme son nom l'indique, la divergence exprime à quel point le champ de vecteur X diverge, c'est-à-dire qu'il quantifie la séparation de deux points qui au départ était proches l'un de l'autre.

6.2.3 Rotationnel

Le rotationnel est un opérateur que l'on a déjà rencontré dans le contexte du théorème de Green pour des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. On va maintenant introduire la notion analogue en dimension 3.

Soit $X\colon A \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ défini sur un domaine A de $\mathbb{R}^3$ et dont les composantes sont $X = (X_1, X_2, X_3)$. On définit le *rotationnel* de X comme le champ de vecteurs

$$\operatorname{rot}(X) = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right).$$

Le rotationnel est donc un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. On le trouve parfois noté

$$\operatorname{rot}(X) = \nabla \times X,$$

car on peut le calculer comme le "produit vectoriel" de $\nabla = \big(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\big)$ avec $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Exemple 6.3. *Se rappeler qu'un champ de vecteurs X défini sur tout $\mathbb{R}^3$ est conservatif si et seulement si* $\operatorname{rot}(X) = 0$.

Exemple 6.4. *Calcul du rotationnel de* $X(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$.

Solution. On écrit $X_1(x, y, z) = y^2 + z^2$, $X_2(x, y, z) = x^2 + z^2$ et $X_3(x, y, z) = x^2 + y^2$. On peut alors calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} &= 2y - 2z \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} &= 2z - 2x \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{rot}(X) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y).$$

Proposition 6.5. *Soit A un domaine de $\mathbb{R}^3$ et soient $X\colon A \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a*

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

Interprétation Le rotationnel quantifie a quel point un champ de vecteur "tourne" autour d'un point. Par exemple, lors d'un cyclone, le rotationnel du vent (vu comme un champ de vecteurs) autour de l'oeil du cyclone est non nul.

6.3 Les théorèmes de Stokes et de la divergence

6.3.1 Le théorème de Stokes en dimension 3

Théorème 6.6. *Soit S une surface de classe $\mathcal{C}^2$ dont le bord est un lacet simple Γ. Soit $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs (défini au moins dans un voisinage de S) dont les composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Alors

$$\iint_S \left\langle \operatorname{rot}(X), d\vec{S} \right\rangle = \int_\Gamma \left\langle X, d\vec{\Gamma} \right\rangle,$$

où $d\vec{S}$ est un vecteur normal à la surface S et $d\vec{\Gamma}$ est tangent au lacet Γ.

Remarque : *On suppose que Γ est parcouru dans le sens* positif*, c'est-à-dire que le sens de $d\vec{S}$ et $d\vec{\Gamma}$ sont reliés par la règle de la main droite.*

En pratique, on commence par trouver une paramétrisation $\varphi(x, y)$ de la surface S comme on le faisait pour les intégrales surfacique. Supposons que le domaine de définition de φ est un domaine U de $\mathbb{R}^2$. On choisit ensuite une paramétrisation du lacet Γ qui est le bord de la surface S par un chemin $\gamma(t)$. Le théorème de Stokes peut alors être ré-écrit

$$\iint_U \langle \operatorname{rot}(X), n_\varphi \rangle \, dx\, dy = \int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle,$$

où n_φ est le vecteur normal à la surface S induit par la paramétrisation φ (cf. Définition 4.7).

Exemple 6.7. *Vérifier le théorème de Stokes lorsque $X(x, y, z) = (-z, x, 0)$ et S est l'hémisphère nord de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ orienté vers le haut.*

Solution. On va paramétrer S en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\varphi(\theta, \sigma) = (\sin(\theta)\cos(\sigma), \sin(\theta)\sin(\sigma), \cos(\theta)).$$

Comme S n'est pas la sphère entière, mais seulement l'hémisphère nord, le domaine U de S est

$$U = \{(\theta, \sigma) : \theta \in [0, \pi/2], \quad \sigma \in [0, 2\pi)\}.$$

On avait déjà calculé le vecteur normal n_φ dans l'Exemple 4.10 où l'on avait obtenu

$$n_\varphi(\theta, \sigma) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cos(\sigma) \\ -\sin(\theta)^2 \sin(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Comme $\cos(\theta)\sin(\theta) \geq 0$ lorsque $\theta \in [0, \pi/2]$, le vecteur normal n_φ pointe vers le haut, comme désiré.

Le rotationnel du champ de vecteurs X est donné par :

$$\operatorname{rot}(X) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -z \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut à présent calculer le membre de gauche dans le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
\iint_U \langle \mathrm{rot}(X), n_\varphi \rangle \, d\theta \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cos(\sigma) \\ -\sin(\theta)^2 \sin(\sigma) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta \, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \sin(\sigma) + \cos(\theta)\sin(\theta) \, d\theta \, d\sigma \\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \, d\sigma \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= 0 + 2\pi \left[\frac{-\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Pour calculer le deuxième membre, on a besoin d'une paramétrisation du bord de S qui correspond au cercle unité dans le plan horizontal. Autrement dit, on peut utiliser la paramétrisation $\gamma(t) = \varphi(\pi/2, t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ pour $t \in [0, 2\pi)$. Cette paramétrisation est dans le sens trigonométrique qui est bien la direction positive lorsque n_φ pointe vers le haut. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 \, dt \\
&= \left[\frac{2t + \sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

6.3.2 Le théorème de la divergence

On conclut avec une nouvelle variante du théorème de Stokes connu sous le nom du théorème de la divergence.

Théorème 6.8. *Soit U un domaine de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est une surface S. Soit $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs (défini au moins au voisinage de U) dont les composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors*

$$\iiint_U \mathrm{div}(X) = \iint_S \left\langle X, d\vec{S} \right\rangle,$$

où $\vec{S}$ est un vecteur normal à S.