Chapitre 5

Le théorème de Green

Dans ce chapitre, on va énoncer et étudier le célèbre théorème de Green. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Stokes que l'on verra plus tard. Il possède de nombreuses applications en mathématiques et en physique, car il permet notamment de réduire l'étude d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ à son bord.

5.1 Énoncé

Théorème 5.1 (Théorème de Green)**.** *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que son bord puisse être paramétré par un lacet $\gamma(t)$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et parcouru dans le sens trigonométrique. Soit $X\colon D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini sur D et dont les composantes sont données par $X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, avec $P\colon D \to \mathbb{R}$ et $Q\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy.$$

Exemple 5.2. *Vérifier le théorème de Green dans le cas où D est le disque de rayon 1 centré en l'origine et $X(x,y) = (x, xy)$.*

Solution. Comme $X(x,y) = (x, xy)$, on a $P(x,y) = x$ et $Q(x,y) = xy$. On calcule donc

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y.$$

On peut à présent déterminer le membre de droite. En utilisant des coordonnées polaires, on peut écrire

$$\begin{aligned}\iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin(\theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.\end{aligned}$$

Or, comme l'on peut paramétrer le bord de D dans le sens trigonométrique à l'aide du chemin $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \cos(t)^2 \sin(t)\, dt \\
&= \left[\frac{-\sin(t)^2}{2} - \frac{\cos(t)^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\
&= 0 - \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 5.3. *Calcule la circulation du champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$ le long du bord du carré $[-1, 1]^2$ parcouru dans le sens trigonométrique.*

Solution. On va utiliser le théorème de Green, ce qui va nous éviter de devoir paramétrer le bord du carré. On va noter $D = [-1, 1]^2$ et son bord γ. On écrit aussi $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = x$ les composantes du champ de vecteurs X. On calcule rapidement que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Le théorème de Green nous dit alors que la circulation de X le long de γ est donnée par

$$\int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle = \iint_D 2\, dx\, dy = 2 \cdot \text{aire}(D) = 8.$$

5.2 Applications

5.2.1 Calculs d'aires

Proposition 5.4. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle le théorème de Green s'applique. On note γ une paramétrisation $\mathcal{C}^1$ par morceaux de son bord, parcouru dans le sens trigonométrique. On a alors*

$$\text{aire}(D) = \int_\gamma \langle X, d\gamma \rangle,$$

où $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ est n'importe quel champ de vecteurs défini sur D qui satisfait

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Par exemple, on peut prendre $X(x, y) = (-y, 0)$, $X(x, y) = (0, x)$ ou encore $X(x, y) = (-y/2, x/2)$, ce qui donne

$$\text{aire}(D) = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle = \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle = \frac{1}{2} \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle.$$

Exemple 5.5. *Calcul de l'aire de l'astroïde dont le bord est paramétré par le lacet*

$$\gamma(t) = (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

Solution. On va dénoter l'astroïde par A. On applique la méthode précédente avec le champ de vecteurs $X(x,y) = (-y/2, x/2)$. On obtient alors

$$\text{aire}(A) = \frac{1}{2} \int_\gamma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, d\gamma \right\rangle$$

Pour calculer cette intégrale, on a besoin du vecteur dérivé $\gamma'(t) = (-3\cos(t)^2 \sin(t), 3\sin(t)^2 \cos(t))$. On a alors

$$\begin{aligned}
\text{aire}(A) &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t)^3 \\ \cos(t)^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos(t)^2 \sin(t) \\ \sin(t)^2 \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \, dt \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin(2t)^2 \, dt \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} \, dt \\
&= \frac{3}{16} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5.2.2 Champs conservatifs

Le théorème de Green nous sert également à trouver un critère pour déterminer si un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est conservatif, au sens de la Définition 3.17.

Proposition 5.6 (La dimension 2)**.** *Soit* $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un champ de vecteurs défini sur* ***l'entièreté*** *de* $\mathbb{R}^2$ *et dont les composantes sont données par*

$$X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Il y a équivalence entre

1. *Le champ* X *est conservatif.*
2. *Pour tous* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, on a*
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Ce critère peut être généralisé en dimension supérieure. Sa preuve n'est alors plus une conséquence du théorème de Green, mais du plus général théorème de Stokes.

Proposition 5.7 (La dimension 3)**.** *De même, si* $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *est un champ de vecteurs défini sur* ***l'entièreté*** *de* $\mathbb{R}^3$ *et dont les composantes sont données par*

$$X(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Il y a équivalence entre

1. *Le champ X est conservatif.*
2. *Pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z).$$

Exemple 5.8. *En reprenant le champ de vecteurs $X(x, y) = (-y, x)$ de l'Exemple 3.16. Ce champ est bien défini sur l'entièreté de $\mathbb{R}^2$. Si l'on applique le critère précédent avec $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = x$, alors on obtient*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On en conclut donc que le champ X n'est pas conservatif.

Attention Pour pouvoir appliquer ces critères, il faut absolument vérifier que le champ de vecteurs X est bien défini sur tout $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.9. *Le champ de vecteurs*

$$X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

est défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (et donc pas sur tout $\mathbb{R}^2$). On a vu en TD qu'il n'était pas conservatif, car sa circulation le long du cercle unité n'est pas nulle. En revanche, si l'on pose $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, alors on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

5.2.3 Inégalité Isopérimétrique

Théorème 5.10. *Soit γ un lacet* simple *de classe $\mathcal{C}^1$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$. On note D le domaine enserré par γ, on a alors*

$$\text{aire}(D) \leq \frac{L(\gamma)^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si γ paramétrise un cercle.