2.3 Interprétation de certains calculs d'intégrale multiples

2.3.1 Aires et volumes

On l'a vu dans l'exemple précédent, le calcule d'intégrales en plusieurs variables permet de retrouver certaines formules d'aire. Ce genre d'interprétation des intégrales est très général, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.6. — *Soit U une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors, l'aire de U est égale à l'intégrale de la fonction constante 1 sur le domaine U :*

$$\mathrm{aire}(U) = \int\int_U dx\,dy.$$

— *Soit U une partie quelconque de $\mathbb{R}^3$. Alors, de manière analogue, le volume de U est :*

$$\mathrm{vol}(U) = \int\int\int_U dx\,dy\,dz.$$

— *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ située entre le domaine D du plan horizontal et la surface décrite par le graphe de la fonction f. Alors, le volume de U est :*

$$\mathrm{vol}(U) = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

2.3.2 Moyennes

Une autre interprétation du dernier point de la Proposition 2.6 est la suivante. Disons que le graphe de f décrit un relief, comme celui d'une colline. La fonction f symbolise alors la hauteur de ce relief au-dessus de D. En calculant l'intégrale de f sur le domaine D on obtient alors pour résultat l'aire du domaine D multipliée par la hauteur moyenne du relief. On peut s'en servir pour déterminer la hauteur moyenne du relief par la formule

$$H_{\mathrm{moyenne}} = \frac{\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy}{\mathrm{aire}(D)}.$$

2.4 Intégrales en tranches

On sait donc à présent faire des intégrales de fonctions sur des parties très simples du plan et de l'espace (les rectangles et les pavés), mais toutes les domaines d'intégration ne sont pas aussi "gentils".

Définition 2.7. *On définit les notions de parties en tranches verticales et horizontales.*

— *Une* partie définie en tranches verticales *est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ et } y \in [g(x),h(x)]\right\}$$

où g et h sont deux fonctions continues $g,h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ qui satisfont $g \leq h$.

— *Une* partie définie en tranches horizontales *est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] \text{ et } x \in [g(y),h(y)]\right\}$$

où g et h sont deux fonctions continues $g,h\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ qui satisfont $g \leq h$.

Exemple 2.8. *Le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est une partie en tranches verticales, car on peut écrire*

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1] \text{ et } y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]\right\}.$$

C'est aussi une partie horizontales, car on peut aussi écrire

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1] \text{ et } x \in \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right]\right\}.$$

On va donner à présent la formule permettant d'intégrer un fonction f définie sur une partie en tranches.

Théorème 2.9. *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie définie en tranches verticales et $f \colon A \to \mathbb{R}$ continue, alors*

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Si, en revanche, A était une partie définie en tranches horizontales, alors

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Attention Lorsque l'on calcule une intégrale sur un domaine défini en tranches, alors on ne peut pas permuter les intégrales comme dans le Théorème 2.3, car les bornes d'intégrations **dépendent** de la variable d'intégration.

Exemple 2.10. *Calculer l'aire du disque unité de $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'une intégrale en tranches.*

Solution. L'aire du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^2$ peut être calculé en intégrant la fonction constante $f(x,y) = 1$ sur le disque. Comme $\mathbb{D}$ est un domaine en tranches verticales, on obtient

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{D}} dx\,dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right) dx \\ &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer la fonction $\sqrt{1-x^2}$. Pour ce faire, on fait le changement de variable $x = \sin(u)$ qui est une fonction bijective $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ avec $dx = \cos(u)du$. Observons que $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(u)^2} = \sqrt{\cos(u)^2} = \cos(u)$, car $\cos(u)$ est toujours positive sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Les nouvelles bornes d'intégrations sont $-\pi/2$ et $\pi/2$. On obtient

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\,du$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction $\cos(u)^2$, on utilise la formule trigonométrique $\cos(u)^2 = (\cos(2u)+1)/2$. Ainsi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{1}{2}\,du = \left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2.$$

On conclut comme s'y attendait que

$$\int\int_{\mathbb{D}} dx\,dy = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

2.5 Changements de variables

On va expliquer comment faire des changements de variables lorsqu'on intègre un fonction à plusieurs variables. En dimension supérieures, par exemple en dimension n, [2] un changement de variable est une application $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ qui est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, la "dérivée" de φ est en fait une différentielle, c'est-à-dire une application matricielle que l'on appelle la **matrice jacobienne** de φ. Ses coefficients sont les dérivées partielles de φ.

Définition 2.11. *Si l'on écrit*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

alors la matrice jacobienne *de φ est la matrice*

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.12. *Par exemple, si l'on considère la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

alors $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La matrice jacobienne de φ est alors donnée par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.13. *Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to V$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_V f(v_1, \ldots, v_n)\, dv_1 \cdots dv_n = \int_U (f \circ \varphi)(u_1, \ldots, u_n) \cdot |\det(\mathrm{Jac}(\varphi))|\, du_1 \cdots du_n.$$

En pratique, on dit qu'on fait le changement de variable $(v_1, \ldots, v_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$.

2.5.1 Exemples de changements de variables classiques

Coordonnées polaires Un changement très courant en dimension 2 est le changement en coordonnées polaires donné par l'application φ définie par

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Les paramètres r et θ correspondent au module et à l'argument du nombre complexe $x+iy = re^{i\theta}$. Leurs domaines sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

2. En pratique, on traitera toujours des dimensions 2 ou 3.

Exemple 2.14. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy.$$

Solution. On procède à un changement de variables $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \cdot r\, d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr.\end{aligned}$$

On observe que la dérivée de la fonction $\exp(-r^2/2)$ par rapport à la variable r est $-r\exp(-r^2/2)$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} r \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr = \left[-\exp(-r^2/2)\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On conclut ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right) dx\, dy = 2\pi.$$

Coordonnées cylindriques Le changement de coordonnées cylindriques est courant en dimension 3. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

Autrement dit, on fait un changement de coordonnées polaires sur les deux premières variables et on garde la troisième telle quelle. Les domaines des paramètres r et θ sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi)$, alors que $z \in \mathbb{R}$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r \geq 0$.

On va voir dans l'exemple suivant qu'on peut également se servir des changement de coordonnées pour calculer des intégrales sur des domaines spéciaux.

Exemple 2.15. *Calculer* $\int_C z\, dx\, dy\, dz$*, où* C *est un cône de hauteur 1 et de base le disque unité dans le plan horizontal.*

Solution. La première étape est de trouver une bonne paramétrisation du cone C. On se rappelle que

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1-z)^2 \text{ et } z \in [0, 1]\}.$$

Autrement dit, la section horizontal du cone à hauteur z est un disque de rayon $1 - z$. Le changement de coordonnées cylindriques $(x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ est un peu spécial. La condition $x^2 + y^2 \leq (1-z)^2$ devient $r^2 \leq (1-z)^2$, ou plus simplement $r \leq 1 - z$. On obtient ainsi

$$\int_C z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} z \cdot r\, d\theta\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} zr\, dr\, dz.$$

On observe que

$$\int_0^{1-z} zr\,dr = z\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-z} = \frac{z(1-z)^2}{2},$$

ainsi que

$$\int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2}\,dz = \int_0^1 \frac{z-2z^2+z^3}{2}\,dz = \left[\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

On conclut donc

$$\int_C z\,dx\,dy\,dz = 2\pi \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi}{12}.$$

Coordonnées sphériques Le dernier changement de coordonnées que l'on veut considérer est le changement de coordonnées sphériques. Il est donné par l'application φ définie par

$$(x,y,z) = \varphi(r,\theta,\sigma) = (r\sin(\theta)\cos(\sigma), r\sin(\theta)\sin(\sigma), r\cos(\theta)).$$

Les domaines des paramètres r, θ et σ sont $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta \in [0,\pi]$ et $\sigma \in [0, 2\pi)$. La matrice jacobienne de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\sigma) & r\cos(\theta)\cos(\sigma) & -r\sin(\theta)\sin(\sigma) \\ \sin(\theta)\sin(\sigma) & r\cos(\theta)\sin(\sigma) & r\sin(\theta)\cos(\sigma) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est donné par $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = r^2\sin(\theta) \geq 0$.

Exemple 2.16. *Calculer $\int_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$, où B est la boule centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^3$ et de rayon R.*

Solution. On effectue un changement de coordonnées sphériques. On observe que $x^2+y^2 = r^2\sin(\theta)^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_B x^2+y^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)^2 \cdot r^2\sin(\theta)\,d\sigma\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^4\sin(\theta)^3\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta\right) \\ &= \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale de $\sin(\theta)^3$. On utilise pour cela l'astuce suivante $\sin(\theta)^3 = \sin(\theta)(1-\cos(\theta)^2) = \sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)^2$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(\theta)^3\,d\theta &= \int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta - \int_0^\pi \sin(\theta)\cos(\theta)^2\,d\theta \\ &= [-\cos(\theta)]_0^\pi - \left[\frac{-\cos(\theta)^3}{3}\right]_0^\pi \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

On conclut que
$$\int_B x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{8\pi R^5}{15}.$$