Chapitre 1

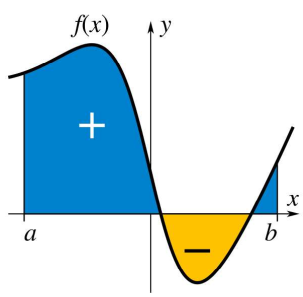
Rappel sur les intégrales unidimensionnelles

1.1 Qu'est-ce que l'intégration ?

L'intégrale unidimensionnelle, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction à une variable sur un intervalle réel, à plusieurs interprétation.

1. La première interprétation, la plus connue en général, est le calcul de "l'aire sous la courbe". C'est l'interprétation donnée par Riemann lors de la construction de son intégrale.

   Plus précisément, soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f entre a et b est dénotée
   $$\int_a^b f(x)\, dx$$
   et définie comme l'aire **signée** enfermée entre l'axe horizontal et le graphe de la fonction dont on calcule l'intégrale. L'aire est comptabilisée positivement si la région se situe au-dessus de l'axe horizontal et négativement si elle se situe au-dessous, comme illustré par la figure ci-dessous [1].



   La construction formelle de l'intégrale par Riemann repose sur une approximation de la fonction dont on souhaite calculer l'intégrale par des fonctions en escaliers. Or l'intégrale

1. Lien vers l'image https://en.wikipedia.org/wiki/Integral, consulté le 28.01.2025.

d'une fonction en escalier est exactement une somme d'aires de rectangles. Ainsi, plus la fonction en escalier est proche de la fonction initiale, plus la somme des aires des rectangles est proche de l'aire se trouvant sous le graphe de notre fonction initiale.

2. Une autre interprétation du calcul d'une intégrale est la suivante. Supposons que notre fonction nous donne la température relevée le long d'une tige métallique. Alors le rapport de l'intégrale de la fonction par la longueur de la tige nous fournis la température moyenne relevé le long de cette tige.

   Si l'on pense à la tige comme l'intervalle $[a, b]$ et qu'on mesure une température $f(t)$ au point t de la tige, alors la température **moyenne** le long de la tige est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

1.2 Comment se calcule une intégrale ?

Il existe plusieurs manières de calculer une intégrale. On va en rappeler trois.

1.2.1 Primitive

La méthode de base pour calculer une intégrale de la fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est de trouver une *primitive* de la fonction f, c'est-à-dire une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée de F est f :

$$F'(x) = f(x).$$

D'une fois que l'on a identifié une primitive F de f, on a alors la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Quand utiliser cette méthode ? À chaque fois qu'on est capable d'identifier de mémoire ou de construire une primitive de f.

Exemple 1.1. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx.$$

Solution. Une primitive de la fonction $\cos(2x)$ est donnée par la fonction $\sin(2x)/2$. On a donc

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

1.2.2 Changement de variables

Une autre méthode importante est connue sous le nom de changement de variables. L'idée est de remplacer la variable x par une nouvelle variable pour laquelle la fonction à intégrer s'exprime de manière plus simple. Le résultat général est le suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

En pratique, on dit qu'on fait le changement de variable $x = \varphi(u)$. Le terme $f(x)$ devient donc $f(\varphi(u))$ et le terme dx devient $\varphi'(u)\,du$ (car $\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}\varphi(u) = \varphi'(u)$). Il ne faut pas oublier de changer les deux bornes d'intégration a et b et les remplacer par les bonnes valeurs de α et β !

Exemple 1.3. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Solution. Il n'est pas nécessairement clair *a priori* quelle est la primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En revanche, le terme $\sqrt{1-x^2}$ nous indique un changement de variables trigonométrique. En effet, si l'on pose $x = \sin(u)$ avec $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, alors $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(u)^2} = \sqrt{\cos(u)^2} = |\cos(u)| = \cos(u)$, car $\cos(u) \geq 0$ pour $u \in [-\pi/2, \pi/2]$. Du coup, $dx = \cos(u)\,du$. Les nouvelles bornes d'intégrations sont 0 et $\pi/2$, car la fonction $\sin(u)$ est une bijection de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$. On a donc

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(u)} \cdot \cos(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

Quand utiliser cette méthode ? Cette méthode peut être très utile quand on ne trouve pas de primitive pour la fonction à intégrer.

1.2.3 Intégration par partie

La dernière méthode est celle de l'intégration par partie. La formule est la suivante.

Théorème 1.4. *Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

En pratique, lorsque l'on applique cette méthode, on doit choisir qui va jouer le rôle de f—la fonction à dériver—et qui va jouer le rôle de g—la fonction à intégrer. Le but étant de simplifier au maximum la fonction à intégrer, on va en général choisir f comme la fonction dont la dérivée est la plus simple possible.

Quand utiliser cette méthode ? Cette méthode s'avère particulièrement utile lorsque l'on veut calculer l'intégrale du produit de deux fonctions de nature différente.

Exemple 1.5. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-1}^0 xe^{-x}\,dx.$$

Solution. La fonction que l'on souhaite intégrer est le produit de deux fonctions de nature différente : une fonction linéaire (ou polynomiale) et la fonction exponentielle. Il n'est pas clair quelle est la primitive dans ce cas ou quel bon changement de variables on pourrait essayer. On va donc procéder à une intégration par partie.

On va prendre $f(x) = x$ (la fonction à dériver). Sa dérivée est très simple, car $f'(x) = 1$. Du coup, $g'(x) = e^{-x}$. Il faut donc trouver une fonction dont la dérivée est e^{-x}. On peut prendre $g(x) = -e^{-x}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx &= [-xe^{-x}]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 1 \cdot -e^{-x}\,dx \\ &= 0 - (-(-1)e) + \int_{-1}^{0} 1 \cdot e^{-x}\,dx \\ &= -e + [-e^{-x}]_{-1}^{0} \\ &= -e + (-1) - (-e) \\ &= -1.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales doubles et triples

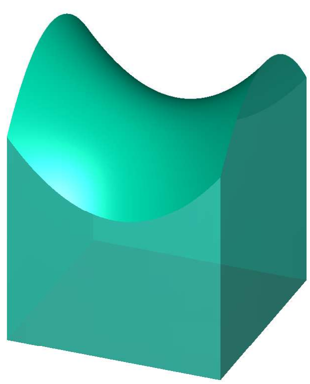
2.1 Intégrales doubles

Pour définir l'intégration de fonctions à plusieurs variables, on va commencer par les ensembles de définitions de fonctions les plus simples puis les complexifier et voir comment adapter nos définitions. On va commencer par intégrer des fonctions sur des **rectangles**.

Définition 2.1. *Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle dans le plan. Soit $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le rectangle R. L'*intégrale de f sur R *est donnée par*

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Interprétation géométrique L'intégrale de la fonction $f(x, y)$ correspond au volume situé entre le rectangle R et le graphe de la fonction $f(x, y)$ auquel on pense comme une "nappe" au-dessus du rectangle R (voir aussi la Proposition 2.10). Comme pour l'intégrale unidimensionnelle, les portions du volume situés au-dessous du rectangle R sont comptés négativement. Par exemple, l'illustration ci-dessous [1] représente le volume compris entre le rectangle $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et le graphe de la fonction $f(x, y) = 10 - \frac{x^2 - y^2}{8}$.



1. Lien vers l'image https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral, consulté le 28.01.2025.

En d'autres termes, intégrer la fonction $f(x,y)$ sur le rectangle R se fait en deux étapes :

1. Tout d'abord, on intègre la fonction $f(x,y)$ selon x en traitant y comme une constante. On le fait avec les méthodes de l'intégrale unidimensionnelle. La solution de cette étape est une fonction $g(y)$ qui ne dépend plus que de y.
2. Alors, on ré-intègre $g(y)$ cette fois-ci comme une fonction de la variable y en utilisant une nouvelle fois les techniques d'intégration unidimensionnelle.

Exemple 2.2. *Soit* $R = [0,1] \times [0,2]$. *Calculer*

$$\int\int_R xye^{x^2y}\,dx\,dy.$$

Solution. Par définition,

$$\int\int_R xye^{x^2y}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx\right) dy.$$

On commence par calculer

$$\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx$$

en traitant y comme une constante. On remarque qu'en dérivant la fonction e^{x^2y} par rapport à x, on obtient $2xye^{x^2y}$. Cela signifie que la fonction $e^{x^2y}/2$ est une primitive de xye^{x^2y} (lorsque l'on dérive par rapport à x et qu'on traite y comme une constante). Donc

$$\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx = \left[\frac{e^{x^2y}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right).$$

Il nous reste donc à calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right)\,dy.$$

Cette intégrale se sépare en deux parties

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^y - 1\right)\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^y\,dy - \frac{1}{2}\int_0^2 dy \\ &= \frac{1}{2}[e^y]_0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 \\ &= \frac{e^2-3}{2}.\end{aligned}$$

On conclut ainsi

$$\int\int_R xye^{x^2y}\,dx\,dy = \frac{e^2-3}{2}.$$

On peut se demander s'il est vraiment important d'intégrer d'abord par rapport à x, puis ensuite par rapport à y. La réponses est non en général grâce au théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit* $f\colon R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors*

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Astuce En pratique, quand on veut intégrer une fonction f sur un rectangle, on va bien choisir la variable par rapport à laquelle on intègre en premier.

Exemple 2.4. *Soit* $R = [0,1] \times [0,2]$*. Calculer l'intégrale*

$$\int\int_R xe^{xy}\, dx\, dy.$$

Solution. La variable y n'apparait qu'une seule fois dans la fonction à intégrer ; on va donc essayer d'intégrer d'abord par rapport à y. Autrement dit, on calcule

$$\int\int_R xe^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\, dy\right) dx.$$

La dérivée de la fonction e^{xy} par rapport à y donne xe^{xy}. Cela signifie que la fonction e^{xy} est une primitive de xe^{xy} et ainsi

$$\int_0^2 xe^{xy}\, dy = [e^{xy}]_0^2 = e^{2x} - 1.$$

Il reste à calculer

$$\int_0^1 e^{2x} - 1\, dx = \int_0^1 e^{2x}\, dx - 1.$$

Une primitive de la fonction e^{2x} est la fonction $e^{2x}/2$. On obtient donc

$$\int_0^1 e^{2x}\, dx = [e^{2x}/2]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}.$$

Au final, on conclut

$$\int\int_R xe^{xy}\, dx\, dy = \frac{e^2-1}{2} - 1 = \frac{e^2-3}{2}.$$

2.2 Intégrales triples

Les intégrales triples se calculent comme les intégrales doubles, sauf que cette fois le domaine d'intégration n'est plus un rectangle dans le plan, mais un **pavé** dans l'espace à trois dimensions.

Définition 2.5. *Soit* $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ *un pavé dans l'espace (et non pas dans la marre). Soit* $f\colon P \to \mathbb{R}$ *une fonction continue définie sur le pavé* P*. L'*intégrale de f sur P *est donnée par*

$$\int\int\int_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^f f(x,y,z)\, dx\right) dy\right) dz.$$

Autrement dit, l'intégrale de f se calcule comme intégrales unidimensionnelles successives d'abord en x, puis en y et enfin en z. Comme pour les intégrales doubles (voir le Théorème 2.3), on peut intégrer selon les trois variables dans n'importe quel ordre.