L2 STUE : Mathématiques 4

TD 5

Exercice 1 (Aire d'un graphe)**.** *Soit* $U \subset \mathbb{R}^2$ *et* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *une fonction. Le* graphe de f *est la surface* S *paramétrée par* $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

1. *Calculer les dérivées partielles de* φ *et en déduire que la paramétrisation* φ *de* S *est régulière.*
2. *Trouver un champ de vecteurs normal à* S *et montrer que*

$$\operatorname{aire}(S) = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dx\, dy.$$

3. *Calculer cette aire lorsque* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *et* U *est le disque unité.*

Exercice 2. *Soit* T *la surface paramétrée par* $\psi\colon (0, 2\pi) \times (1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\psi(\theta, z) = \left(\frac{\cos(\theta)}{z}, \frac{\sin(\theta)}{z}, z\right).$$

1. *Représenter graphiquement* T.
2. *Calculer l'aire de la surface de* T.
3. *Déterminer le volume emprisonné par* T, *c'est-à-dire le volume de l'ensemble*

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/z\}.$$

Exercice 3. *Soit* S *la surface paramétrée par* $\varphi\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ *où* $\varphi(x,y) = (x, y, x^2 + y)$. *Calculer*

$$\iint_S x.$$

Exercice 4. *Calculer l'intégrale*

$$\iint_S x^2 y^2 z,$$

où $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercice 5. *Soit* $\psi\colon U = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ *l'application définie par*

$$\psi(s,t) = (\cos(s), \sin(s), \sin(t)).$$

1. *Montrer que l'image de* ψ *est le cylindre*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}.$$

2. *Vérifier que* ψ *est injective.*

On note à présent $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\varphi(s,t) = (\cos(t)\cos(s), \cos(t)\sin(s), \sin(t)).$$

3. *Montrer que l'image de* φ *est égale à la sphère unité.*
4. *Montrer que* φ *est injective.*

Finalement, calculer $\|n_\psi(s,t)\|$ *et* $\|n_\varphi(s,t)\|$. *En déduire l'aire de sphère unité et du cylindre* C.

Exercice 6. *Calculer l'aire d'un hélicoïde paramétré par*

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta),$$

où $(r,\theta) \in (0,1) \times (0,2\pi)$.

Exercice 7. *Calculer l'aire d'un tore paramétré par*

$$\varphi(u,v) = \big((R+\cos(u))\cos(v), (R+\cos(u))\sin(v), \sin(u)\big)$$

où $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ *et* $R > 1$ *est un paramètre fixé.*