L2 STUE : Mathématiques 4

TD 3

Encore quelques intégrales

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $$\iint_R \frac{x}{x+2y}\,dx\,dy,$$
   où $R = [1,2] \times [0,1]$.
2. $$\iiint_P z + \frac{1}{\sqrt{3+2x+y}}\,dx\,dy\,dz$$
   où $P = [-1,1] \times [0,3] \times [\sqrt{2}, 2]$.
3. $$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \int_{0}^{\pi} \int_{-\pi}^{y} \cos(x)\sin(y)\tan(z)\,dx\,dy\,dz$$

Exercice 2. *On souhaite calculer*

$$I = \iint_T x^2 + y^2\,dx\,dy.$$

1. *Calculer* I *lorsque* T *est le triangle de sommets* $(1,1), (2,1)$ *et* $(2,2)$.
2. *Calculer* I *lorsque* T *est le triangle de sommets* $(0,0), (1,1)$ *et* $(3,5)$.

Exercice 3. *Soit* C_1 *le cercle centré en l'origine et de rayon* $r_1 > 0$ *et soit* C_2 *le cercle centré en l'origine et de rayon* $r_2 > r_1$. *L'anneau* A *est le domaine du plan compris entre ces deux cercles.*

1. *Faites un dessin de* A.
2. *Calculer l'aire de* A *une première fois en faisant un bon changement de variable.*
3. *Calculer l'aire de* A *une deuxième fois en le décomposant judicieusement et en le représentant en tranche verticales.*

Remarque : *Vous pouvez egalement calculer l'aire de* A *comme l'aire du grand disque moins l'aire du petit disque et ainsi vérifier vos réponses.*

Exercice 4. *On veut calculer le volume du solide se trouvant au-dessus du domaine* C *du plan horizontal (en forme de croissant) délimité par la droite d'équation* $y = 2x$ *et la parabole* $y = x^2$, *et se trouvant au-dessous du paraboloïde d'équation* $z = x^2 + y^2$.

1. *Exprimer ce volume comme une intégrale double sur* C.
2. *Intégrer par tranches verticales.*
3. *Intégrer par tranches horizontales.*

Intégrales curvilignes

Exercice 5. *Calculer l'intégrale curviligne de f le long des chemins γ suivants :*

1. $f\colon (x,y) \mapsto xy^2$ *et* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 2t)$.
2. $f\colon (x,y) \mapsto x^3$ *et* $\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ *avec* $r > 0$.
3. $f\colon (x,y) \mapsto x^3 + y$ *et* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (3t, t^3)$.
4. $f\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ *et* $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$.

Exercice 6. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$.

1. *Le* graphe de la fonction f *est donné par le chemin* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. *Monter que la longueur du graphe de* f *est donnée par*
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$
2. *Calculer cette longueur dans le cas où* $a = 1$, $b = 2$ *et* $f(t) = \ln(t)$.
3. *Calculer la longueur dans le cas où* $a = 0$, $b = 1$ *et* $f(t) = \cosh(t)$.

Exercice 7. *On paramètre une* astroïde *(consulter Wikipedia pour avoir une illustration) via le chemin* $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *défini par*
$$\gamma(t) = (a\cos(t)^3, a\sin(t)^3),$$
pour un certain paramètre $a > 0$.

Calculer la longueur de l'astroïde en fonction de a.